数学科学学院本科生2021 — 2022学年第二学期《点集拓扑学》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、(10分) 设 $\mathcal{O}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑。定义

$$\mathcal{O}' = \big\{U \in \mathcal{O} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ 有界}\big\} \cup \{\varnothing\}\text{。}$$

证明：$\mathcal{O}'$ 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑。

得 分

二、(10分) 证明：平面上以所有直线为子基的拓扑是离散拓扑。

得 分

三、(10分) 证明：闭区间 $[0,1]$ 与圆周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 不同胚。

草 稿 区

得 分

四、(10分) 设 F 是拓扑空间 X 的闭子集，$A \subseteq X$ ，证明：$(F \cup A^\circ)^\circ = (F \cup A)^\circ$ 。

得 分

五、(10分) 证明：Sorgenfrey 直线 $\mathbb{R}_\ell$ 是第一可数的，且是可分的，但不是第二可数空间。

得 分

六、(10分) 证明：第二可数空间的开连续像仍是第二可数空间。

草 稿 区

得 分

七、(10分) 设 X 是度量空间 (X,d) 的开子集。证明：U 同胚于 $X\times\mathbb{R}$ 的闭子集。

得 分

八、(10分) 证明：Cantor 集 C 同胚于它自身的可数次幂 $C^{\mathbb{N}}$ 。

草 稿 区

得 分

九、(10分) 设 X 是拓扑空间，Y 是 Hausdorff 空间，$f : X \to Y$ 连续，定义

$$E(f) = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}.$$

证明：$X/E(f)$ 是 Hausdorff 空间。

草 稿 区

得 分

十、(10分) 称拓扑空间 X 可数紧，若 X 的任意可数开覆盖都有有限子覆盖。证明：X 可数紧当且仅当 X 中任意序列都有聚点。