

数学科学学院 2015 级概率论期末考试

命题人: 江一鸣 (回忆: 张万鹏)

- 一、(1) 求泊松分布 $P(\lambda)$ 的方差和母函数;
(2) 求正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望和特征函数.

二、若 ξ 与 η 相互独立, 且分别服从 $\Gamma(r_1, \lambda)$ 及 $\Gamma(r_2, \lambda)$, 试求 $\alpha = \xi + \eta$ 与 $\beta = \frac{\xi}{\xi + \eta}$ 的联合密度函数 $q(u, v)$, 并证明 α 与 β 独立.

- 三、(1) X, Y 服从均匀分布 $U[0, 1]$, 求 $Z = X + Y$ 的分布;
(2) ξ, η 服从正态分布 $N(0, 1)$, 求 $\zeta = \xi - \eta$ 的分布.

- 四、(1) 叙述两随机变量不相关和独立的定义;
(2) 举出不相关但不独立的例子;
(3) 设随机变量 ξ 与 η 独立, 证明 $\exists C > 0$, 使得 $P\{\xi = C\} = 1$.

- 五、(1) 叙述大数定理的定义;
(2) 证明 Chebyshev 不等式;
(3) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ 是两两不相关的随机变量序列, 且 $\exists C > 0$, 使得 $D\xi_i \leq C (i = 1, 2, \dots)$, 证明 $\{\xi_i\}$ 服从大数定律.

- 六、(1) 叙述弱收敛的定义;
(2) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 又 $\{F_n(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上弱收敛于函数 $F(x)$ 的一致有界非降函数序列, 且 a 和 b 是 $F(x)$ 的连续点, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x).$$