数学科学学院本科生2016 — 2017学年第一学期《数理统计》期中考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师:　　　　专业:　　　　年级:　　　　学号:　　　　姓名:　　　　成绩:

得 分

一、填空题(本题共24分, 每空2分).

(1) 设随机变量$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则其概率密度函数为：________________, α称为________参数，其特征函数为：________________.

(2) 设$m > n$, $\alpha \in (0,1)$, 则$F(m,n)$与$F(n,m)$的上侧分位数之间的关系为：$F_\alpha(m,n)$= ____________.

(3) 设$X \sim \chi^2(n)$，则当$n \to \infty$时，$\frac{X-a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathcal{L}}$________，其中$(a_n, b_n)$=(____, ____).

(4) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(0, \sigma^2)$的iid样本，记$T_1 = \sum_{i=1}^n X_i^2, T_2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

则Var(T_1)=________，Var(T_2)=____________.

(5) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体累积分布函数布为$F(x)$的iid样本，记$F_n(x)$为其经验分布函数，则对于

给定的x, $nF_n(x) \sim$ ____________, 其极限分布形式为：________________ .

(6) 对于足够小的$\alpha (< 0.01)$, $t(n)$的上侧α分位$t_\alpha(n)$与u_α的大小关系为：$t_\alpha(n)$____u_α.

得 分

二、(25分) 设n个样本$Y_1, \ldots, Y_n$相互独立，且$Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, 1)$, 其中$x_1, \ldots, x_n$为给定常数，$\alpha, \beta$为未知参数.

(i). (5分)求关于参数(α, β)的似然函数；

(ii). (10分)求α, β的极大似然估计；

(iii). (10分)上述极大似然估计是UMVUE吗？说明理由.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

三、(10分)设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正则分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \theta) : \theta \subset \Theta\}$的iid样本. 证明：$\theta$的无偏估计的方差达到C-R下界的充要条件是$\mathcal{F}$ 为指数型分布族.

草 稿 区

得 分

四、(10分) 设$X_1,\ldots,X_m$与$Y_1,\ldots,Y_n$相互独立，且均为来自$E(\lambda)$的iid样本，求$\bar{X}/\bar{Y}$所服从的分布.

得 分

五、(15分)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，$\bar{X}_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k X_i, S_k^2=\sum_{i=1}^k(X_i-\bar{X}_k)^2$, $Y_1=\sqrt{n}\bar{X}_n, Y_k=\sqrt{\frac{k-1}{k}}(X_k-\bar{X}_{k-1}), k=2,\cdots,n$. 证明

(i). (5分)$S_k^2=S_{k-1}^2+\frac{k-1}{k}(X_k-\bar{X}_{k-1})^2$;

(ii). (10分) $Y_1,\ldots,Y_n$独立且服从正态分布.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

六、(8分)设$T(X)$是参数θ的充分统计量，$\hat{\theta}(X)$是θ的极大似然估计，证明：$\hat{\theta}(X)$是充分统计量$T(X)$的函数.

得 分

七、(8分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体均值与方差为(μ,σ^2)的iid样本，$\sigma^2 < \infty$. 证明$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iX_i$是$\mu$的相合估计.

草 稿 区