数学科学学院本科生2015 — 2016学年第一学期《数理统计》期中考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、填空题(本题共20分, 每空2分).

(1) 设随机变量$X \sim E(\lambda)$，且对于给定的常数a, b, $aX \sim \chi^2(b)$. 则(a,b)=(____,____).

(2) 设$X \sim t(n)$, 则X^2的分布为____, 且其自由度为(_________).

(3) 两点分布族$\{b(1,p), p \in (0,1)\}$的指数型分布族的形式为：__________________, 其自然参数空间Ω=__________________, 其满秩的原因是_________.

(4) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(0,1)$的iid样本，记$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n, T_1 = \sum_{i=1}^n X_i^2, T_2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则$\mathrm{Var}(T_1)$=_________，$\mathrm{Var}(T_2)$=______________.

(5) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自某参数分布族$\{f(x,\theta), \theta \in \Theta \subset R\}$的iid样本，则在一定条件下, 极大似然方程的相合解$\hat{\theta}$的极限分布为：$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,$ _____$)$, 其中θ_0为真值.

(6) 设$X \sim F(m,n)$, 则对于固定的m，当$n \to \infty$时, mX的极限分布为：__________________.

得 分

二、(10分) 设统计量$T(X)$为某参数θ的估计，对于给定的常数a, b，记$S(X) = \begin{cases} a, & T(X) < a, \\ T(X), & a \le T(X) \le b, \\ b, & T(X) > b. \end{cases}$. 证明: $\mathrm{MSE}(S) \le \mathrm{MSE}(T)$.(参数空间$\Theta \subset [a,b]$)

草 稿 区

得 分

三、(16分)设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自均匀分布$U(0,\theta)$的iid样本，其中$\theta > 0$为未知参数.

(i). (3分)求θ的矩估计，并记之为$\hat{\theta}_M$；

(ii). (5分)求θ的MLE，并记之为$\hat{\theta}_{ML}$；

(iii). (8分)从三个方面比较上述两个估计的优劣.

草 稿 区

得 分

四、(12分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，以$\Phi(x)$表示标准正态的CDF.

(i). 证明：$E[\Phi(X_1)]=\Phi(\mu/\sqrt{2})$;

(ii). 求$\Phi(\mu)$的UMVUE.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

五、(20分)设$X_1, X_2, \cdots, X_m$为来自$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的iid样本，$Y_1, \ldots, Y_n$为来自$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的iid样本，且全样本独立.

(i). 求$\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/\sigma_2^2$的UMVUE;

(ii). 当$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$时, 求$\sigma^2$及$(\mu_1 - \mu_2)/\sigma$的UMVUE.

得 分

六、(10分)设$X_1, X_2, \cdots, X_m$为来自$N(\mu_1, \sigma^2)$的iid样本，$Y_1, \ldots, Y_n$为来自$N(\mu_2, \sigma^2)$的iid样本，且全样本独立，其中μ_1, μ_2, σ^2均未知. 求μ_1, σ^2的水平$1-\alpha$的置信区间.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

七、(12分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自Gamma分布$\Gamma(1, \lambda)$的iid样本. 求λ^{-1}的MLE，并证明其相合无偏性.