数学科学学院本科生2014 — 2015学年第一学期《数理统计》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **专业:** **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、填空题(本题共18分, 每空2分).

(i). 设$X_1,\dots,X_n$为来自两点分布$b(1,p)$的iid样本，则其联合分布的典则形式为______________.

(ii). 自由度为n的χ^2分布的特征函数为______________.

(iii). 设$X_1,\dots,X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，则关于假设$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$的水平为$\alpha$的UMPU检验为$\phi(x)=\begin{cases}1, & __________, \\ 0, & 否则,\end{cases}$ 它等同于正态总体显著性检验中的_____检验.

(iv). 总体$\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\subset R\}$的Fisher信息阵$I(\theta)$=_______________________.

(v). 设$X_1,\dots,X_n$为来自$N(0,\sigma^2)$的iid样本，则σ^2的UMVUE为：______________.

(vi). 对于一维参数θ, 以$I(\theta)$记总体的Fisher信息量，则在一定条件下，基于n个iid样本的θ的MLE $\hat{\theta}_n$的极限分布形式为：_______________________.

(vii). 用来检验$r\times s$列联表行列独立的χ^2拟合优度检验为：$\phi(x)=\begin{cases}1, & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ 0, & 否则,\end{cases}$

(viii). 针对$H_0:F(x)=F_0(x)$的Kolmogorov检验统计量为：______________.

草 稿 区

得 分

二、(10分)设$X_1,\ldots,X_m$为来自$N(\mu_1,\sigma^2)$的iid样本，$Y_1,\ldots,Y_n$为来自 $N(\mu_2,\sigma^2)$的iid样本，且全样本独立. 又设a,b为两个常数，$Z=\frac{a(\bar{X}-\mu_1)+b(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_{1m}^2+(n-1)S_{2n}^2}}$. 证明存在常数$c$，使得$cZ$服从$t$分布，并给出常数$c$.

得 分

三、(10分) 设$X_1,\ldots X_N$为来自总体X的iid样本，其总体分布为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{N},k=1,2,\ldots,N.$$

求N的MLE.

草 稿 区

得 分

四、(10分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自均匀分布$U(0, \theta)$的iid样本，其中$\theta > 0$为未知参数. 求θ的置信度为$1 - \alpha$的置信区间.

草 稿 区

得 分

五、(20分) 设$X_1,\ldots,X_m$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，$Y_1,\ldots,Y_n$为来自$N(\mu,4\sigma^2)$的iid样本，且全样本独立.

(i). 求μ,σ^2的MLE，并记μ的MLE为$\hat{\mu}$;

(ii). $\hat{\mu}$是μ的UMVUE吗？说明理由.

(iii). $\hat{\mu}$是μ的相合估计吗？说明理由.

(iv). 当$\sigma^2=1$时，求$H_0:\mu=0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$的水平为$\alpha$的显著性检验.

草 稿 区

得 分

六、(10分)设$X_1, \ldots, X_n$为来自具有如下PDF $f(x,\mu) = \exp\{-(x-\mu)\}I_{\{x \geq \mu\}}$的总体的IID样本,其中$\mu \in R$为参数,求假设$H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 0$的水平为$\alpha$的似然比检验.

草 稿 区

得 分

七、(12分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自Gamma分布$\Gamma(m, \lambda)$的iid样本，其中$m > 0$为已知的正整数，$\lambda > 0$为未知参数.

(i). 求假设$H_0 : \lambda \leq 1 \leftrightarrow H_1 : \lambda > 1$的水平$\alpha$的UMPT, 并记之为$\phi(x)$;

(ii). 证明$\phi(x)$的功效函数单调.

草 稿 区

得 分

八、(10分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自单参数指数型分布族$\{f(x,\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x), \theta \in \Theta\}$的iid 样本，其中$Q(\theta)$严格单增. 给定$\alpha \in (0,1)$及$\theta_0 \in \Theta$.

(i). 求假设$H_0: \theta \le \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$ 的水平为α的UMPT, 记为$\phi(T)$;

(ii). 记$\phi'(x)$为上述$H_0 \leftrightarrow H_1$的一个检验，且满足$E_{\theta_0}\phi'(x) = \alpha$，证明：

$$E_\theta \phi(T) \le E_\theta \phi'(x), \ \forall\ \theta \le \theta_0.$$