

常微分方程2020-2021学年期末考试

出卷人：李明

一、计算题

1. $x^{(4)} + 4x'' + 4x = 0$

2. $X' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$

3. $x'' + x = e^t$

4. 求方程 $x^3 y'' - xy' + y = 0$ 的解, 已知一个特解是 $y=x$.

二、证明下面方程组的零解是渐进稳定的:

$$x' = 1 - e^{-x+2y}$$

$$y' = -\sin(y)$$

三、 $X' = A(t)X + f(t)$. $\exists T$ s. t. $A(t+T) = A(T)$, $f(t+T) = f(t)$. $\phi(t)$ 是方程的一个解, 且满足 $\phi(T) = \phi(0)$. 证明下式恒成立: $\phi(t+T) = \phi(t)$.

四、 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, ϕ_1, ϕ_2 是两解且 $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, 证明 $\exists C$ 使得 $\phi_1 = C\phi_2$

五、 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, $q(t) < 0$ 恒成立, $\phi(t)$ 是一解, 证明下式单调递增:

$$f(x) = e^{\int_0^t p(s)ds} \phi(t) \phi'(t)$$

回忆人：数理双修