

# 2020-2021年第一学期数学物理方程期末考试题

雷锋叔叔

2021年1月5日

1. 设 $\Omega$ 有光滑边界,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ ,  $Q \in \Omega$ , 试证明

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dx$$

2. 求热传导算子  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  的基本解.

3. 用傅里叶方法求解方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(0, 0) = u(0, \pi) = 0 \\ u(0, x) = \sin x \end{cases}$$

4. 用能量积分法证明波动方程初边值问题的稳定性, 其中维度  $n = 2$

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, t) \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x) \\ u_t|_{\partial\Omega} = \psi(x) \end{cases}$$

5. 设  $f \in C^k(\Omega)$ ,  $K$  为  $\Omega$  的紧子集, 证明存在一系列  $C_0^\infty$  函数在  $K$  上一致收敛到  $f$ .

6. 设  $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , 试证明

(1)  $(f * g) * h = f * (g * h)$

(2)  $\delta * f = f * \delta$

(3)  $\partial^\alpha (f * g) = \partial^{\alpha_1} f * \partial^{\alpha_2} g$ , 其中  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

7.

(1) 求  $\delta$  的 Fourier 变换.

(2) 求 1 的 Fourier 变换.