数学科学学院2015级常微分方程期中考试(数学类)

命题人:李明 (回忆人:张万鹏)

一、解下列微分方程

(1)$x(y-x)y'=y^2$.

(2)$y'=-2xy+2x$.

(3)$(3x^2y+2xy+y^3)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$.

(4)$y'(x-\ln y')=1$.

二、已知$f(x,y)=x\sqrt{|y|}$，证明:

(1)$f(x,y)$在区域$\{-1<x<1,-\infty<y<+\infty\}$内对$y$不满足局部Lipschitz条件；

(2)$f(x,y)$在区域$\{-1<x<1,0<y<+\infty\}$内对y满足局部Lipschitz条件，但不满足Lipschitz条件.

三、设方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

中的$M(x,y),N(x,y)$连续可微且满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y),$$

其中$f(x),g(y)$分别为x,y的连续函数，证明方程(1)有积分因子$\mu=\exp\left(\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(y)\mathrm{d}y\right)$.

四、证明方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos y}{e^x+y^2}$的每一个解的最大存在区间都是$(-\infty,+\infty)$.

五、设$f_1(x,y),f_2(x,y)$在区域$R:|x|\leqslant a,|y|\leqslant b$连续可微，且满足

$$f_1(x,y)<f_2(x,y),\forall(x,y)\in R.$$

证明:若$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$是方程$y'=f_1(x,y),y'=f_2(x,y)$过初值$(0,0)$的解，则当$0<x\leqslant h$时有$\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$.其中$h=\min\{a,\dfrac{b}{M_1},\dfrac{b}{M_2}\}$，$M_i=\max\limits_{(x,y)\in R}|f_i(x,y)|(i=1,2)$.