南开大学物理科学学院2016-2017学年第一学期数值分析期末考试
（颜瑞民整理）

命题人：由同顺 考试时间：2017年1月12日

一、（20分）用顺序高斯消元法求解下列方程组，并给出系数矩阵的Doolittle分解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

二、（15 分）设方程组 $AX=b$ 的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & -2 \end{pmatrix}$. (没记全). 讨论解此方程组的Jacobi迭代法和GS迭代法的收敛性，若收敛，求收敛速度.

三、（25分）

1.（6分）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

求 A 的谱半径，$\|A\|_\infty$, $\mathrm{Cond}(A)$, 及 $I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots$.

2.（4分） $f(x)=x^3+x+1$, 求 $f\left[2^0,2^1\right], f\left[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4\right]$.

（后面的题号和分值都忘了）

3.（15分）

（1） $[-1,1]$上，构造以 $w(x)=x^2$ 为权函数的首1的正交多项式 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x),\varphi_2(x)$.

（2）利用1中的 $\varphi_2(x)$ 构造Guass型求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)w(x)\mathrm{d}x=A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$，并导出求积公式的系数表达式.

四、（10分）

1.求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x},[1,2]$ 的一次最佳平方逼近多项式.

2.求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x},[0,1]$ 的一次最佳一致逼近多项式.

3.求数据

$$x_1=-1,x_2=-\frac{1}{2},x_3=0,x_4=\frac{1}{2},x_5=1,y_1=-1,y_2=0,y_3=1,y_4=2,y_5=1$$

的最小二乘拟合 $f(x)=a\sin\pi x+b\cos\pi x$.

五、（10分）

1. （4分）$\|A\|_2$ 为矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的谱范数，$\|A\|_F$ 为 A 的Frobenius范数，证明

$$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},\|A\|_F\le\sqrt{n}\,\|A\|_2.$$

2.（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶连续导数，满足 $f(x_1)=0, f'(x_i)=0, i=0,1,\cdots,n.$ 求一个次数不高于 n 的多项式 $P(x)$，满足

$$P(x_1)=f(x_1)=0, P(x_i)=f'(x_i)=0, i=0,1,\cdots,n,$$

证明 $P(x)$ 的唯一性及

$$\left|f(x)-P(x)\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{a\le x\le b}\left|f^{n+1}(x)\right|.$$

六、（6 分）A 为 $n\times n$ 实对称正定矩阵，B 为 $n\times m$ 列满秩矩阵，迭代法的迭代公式为

$$\begin{cases} Ax^{(k+1)} = By^{(k)}, \\ y^{(k+1)} = (\quad) wBx^{(k)} + c, \end{cases}$$

求迭代法收敛的充要条件以及最佳的 w.

参考文献：

[1] 林成森.数值分析[M]. 北京：科学出版社，2016.

南开大学物理科学学院 2013 级
颜瑞民
WeChat: yrm314