研究生泛函分析 2025-2026 第一学期期末考试题

回忆人：神猴仙人

2026 年 1 月 16 日

1、请叙述稀疏集的概念.E 是无限维 Banach 空间 X 的有限维线性子空间，证明 E 是 X 中的稀疏集.

2、T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子. 试证明以下结论：

(1) $\ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$，证明 $\ker(T)$ 是 X 的闭子空间.

(2) $[x]$ 为 $X/\ker(T)$ 中元素，证明映射 $\hat{T} : [x] \mapsto Tx$ 是线性的.

(3) 证明 $\hat{T}$ 是有界的.

(4) 计算 $||\hat{T}||$.

3、X 为 Banach 空间，X 的对偶空间 X^* 上的单位球面 $S^1(X^*) = \{x^* \in X^* : ||x^*|| = 1\}$ 可分，证明 X 可分.

4、证明 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 K 上的有界线性算子 T 为有限秩算子当且仅当存在 $\{h_1, h_2, \cdots, h_n\} \subseteq H$ 和 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \subseteq K$，使得

$$Th = \sum_{i=1}^{n} < h, h_i > k_i \qquad \forall h \in H.$$

5、X，Y，Z 为 Banach 空间.

(1) $\{G_\alpha\}$ 为 Y 到 Z 的有界线性算子族，且满足若对于所有的 α，若 $G_\alpha(y) = 0$，则有 $y = 0$. 证明：若 F 为 X 到 Y 的线性算子，对任意的 α，$G_\alpha \circ F$ 有界，则 F 有界.

(2) F 为 X 到自身的线性算子，证明 F 有界当且仅当任意的 $x^* \in X^*$，$x^* \circ F$ 有界.