南开大学数学科学学院2025——2026学年度数理统计期末考试 A卷

回忆者：沽上旅人（微信公众号同名，欢迎关注）

注1：填空题的部分题干可能不准确
注2：大题的分值可能回忆有误

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）
1. $\Gamma(\alpha,\lambda)$ 的特征函数是 ____________ , 期望为 ____________ ， 方差为 ____________ 。
2.设 $X_1,...,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu,\sigma_0^2)$,则检验：

$$H_0:\mu\le\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$$

的水平 α 的UMPT为：

$$\psi(X)=\begin{cases}1, \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

它与正态总体中的 ____________ 检验等价。
3.设 $\phi(x)$ 为关于假设

$$H_0:\theta\le\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$$

的水平 α 的UMPT，则它在检验类 $\Phi^*=\{\underline{\qquad\qquad}\}$ 中第 ____________ 类错误概率最小；在检验类 $\Phi^*=\{\underline{\qquad\qquad}\}$ 中第 ____________ 类错误概率最小。

> 笔者批注：老师考前强调过优势检验的两个最优性要知道。

4.设 $X\sim T^2(p,n)$ ，则 X 与 F 分布的关系为 ____________ 。
5.设 $X_1,...,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(0,\Sigma)$ ，向量 a 满足 $a^T\Sigma a\ne 0$ ， $W=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i^T$ ，则 $\frac{a^TWa}{a^T\Sigma a}\sim\underline{\qquad\qquad}$ 。
6.设 $X\sim N_p(0,\sigma^2I_p)$ ，非负定对称矩阵 A 的秩为 p ，则 $\frac{X^TAX}{\sigma^2}\sim\chi^2(p)$ 的充要条件是 ____________ 。
二（ 17 分）设 $X_1,...,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} X$ ，总体 X 服从对数正态分布 $LN(\mu,1)$ ，记 $g(\mu)=\mathbb{E}(X)$ 。
(1) 证明 $g(\mu)=exp\left\{\mu+\frac{1}{2}\right\}$ （ 4 分）;

(2) 求 $g(\mu)$ 的矩估计和极大似然估计（ 8 分）；

(3) 求假设： $H_0: g(\mu) = 1 \leftrightarrow H_1: g(\mu) \neq 1$ 的水平为α 的显著性检验(5分)

提示：令$Y = ln(X)$，则$Y \sim N(\mu, 1)$

> 笔者批注：本题的工作量比较大，这个提示是试卷上附在题末的，老师也考虑到了绝大多人记不得对数正态分布的密度函数是什么。

三（ 10 分）设分布族 $\mathcal{F} = \{f(x,\theta): \theta \in \Theta\}$ 是 $C-R$ 正则分布族， $g(\theta)$ 是 Θ 上的可导函数，样本 $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ 为 IID 的，设 $T(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的任一估计，且满足:

$\frac{\partial}{\partial\theta}\int T(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)dx = \int T(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\mathbf{x},\theta)dx$

$B(\theta) = E_\theta T(\mathbf{X}) - g(\theta)$,证明：

$$MSE(T) \geq B^2(\theta) + \frac{[g'(\theta) + B'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

其中 $I(\theta)$ 为 $Fisher$ 信息量。

> 笔者批注：老师考前强调过要考 $C-R$ 不等式。注意题干 $T(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的任一估计，而不是 UE ，因此本题推广了 $C-R$ 不等式的结论，但完全是仿照 $C-R$ 不等式的证明方法去做的。

四（ 12 分）设 $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} E(\lambda)$ ，求假设：

$$H_0: \lambda = 1 \leftrightarrow H_1: \lambda > 1$$

的水平 α 的UMPT。

> 笔者批注：老师考前强调过要考指数型分布族的非单边的优势检验。

五（ 14 分）设 $X_1, ..., X_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ ， $Y_1, ..., Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ 。

(1) 若 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$,给出 Σ 的一个好的点估计（ 6 分）；

(2) 若 $m = n$ ，求假设：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

的水平 α 的似然比检验（ 8 分）。

> 笔者批注：老师考前特意强调，多元部分出的题目比较简单，是一道两样本均值检验的问题，且要往单样本均值检验上考虑，指向性已经非常明显了；并且也强调过似然比要会算。

六（ 18 分）设 $Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon$ ， $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ ， σ^2 是未知参数。

(1) 求 β, σ^2 的最小二乘估计(6 分);

(2) 写出平方和分解式(6 分);

(3) 写出判断 β 是否显著的ANOVA(6 分)。

> 笔者批注：老师考前强调过线性模型 β 系数的估计还有方差分解要会。

七（5 分）设 $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} F(x)$，其中 $F(x)$ 是总体的累积分布函数，设 $F_n(x)$ 是其经验分布函数，证明 $F_n(x)$ 是 $F(x)$ 的极大似然估计。

> 笔者批注：老师考前说非参数部分出了一道 5 分的大题我们不一定会做，这道题目确实挺难的。