

南开大学数学学院本科生 2025-2026 学年第 二学期概率论期末考试

考试时间：2026 年 6 月 30 日 18: 30-20: 10

—

1. 袋中有 4 个白球，6 个红球。连续不放回地摸出 3 个球，求按顺序摸出“红、白、红”的概率。
2. 设随机变量 $\xi \sim U(0, 1)$ ，求 $E(\xi)$ 和 $D(\xi)$ 。

二

1. 已知袋中有 a 只白球、 b 只黑球，随机取出一只，并加入同色球 s 只。记 R_n 表示第 n 次摸球摸出白球，证明：

$$P(R_n) = \frac{a}{a+b}.$$

三

1. 设 $\xi \sim N(0, 1)$ ，用定义求 ξ 的特征函数。
2. 设 ξ 与 η 独立同分布，且都服从 $N(0, 1)$ ，求 $\xi + \eta$ 的密度函数。

四

1. 已知随机变量 $\xi \sim P(\lambda)$, 求 ξ 的母函数。
2. 已知蚕产卵的数量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布, 每颗卵发育为成虫的概率为 p , 且各卵是否发育为成虫相互独立。求成虫数量 η 的分布。

五

设 (ξ, η) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{4}, \quad -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

证明:

1. ξ 与 η 不独立;
2. ξ^2 与 η^2 独立。

六

1. 设随机变量 ξ 的均值和方差存在, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|\xi - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

2. 设 $\{\xi_n\}$ 为相互独立的随机变量序列, 它们的数学期望都存在, 且方差一致有界, 证明 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律

七

1. 叙述分布函数弱收敛的定义。
2. 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 对应的特征函数列为 $\{f_n(t)\}$, 若 $f_n(t) \rightarrow f(t)$ 逐点成立, 且 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处连续, 则存在分布函数 $F(x)$, 使得 $F_n(x)$ 弱收敛于 $F(x)$, 且 F 的特征函数即为 f 。