

南开大学数学学院本科生 2025-2026 学年第二学期 实变函数期末考试

考试时间：2026 年 6 月 30 日 14: 00-15: 40

一

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中任何两点的距离都大于 1，证明 E 是可测集。

二

若 A, B 可测且 $A \cap B$ 是零测集，证明 $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ 。

三

若 f 在任何闭区间 $[a, b]$ 上可测，证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上可测。

四

若对任何可测集 E ，都有 $\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$ ，证明 $f \leq g$ 几乎处处成立。

五

设 $f \in L(\mathbb{R})$ ，证明 $\sum_{k=1}^{\infty} m(\{|f| \geq k\})$ 收敛。

六

设 $m(E) < \infty$ ， $\{f_k\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列。求证：为使 $f_k \Rightarrow 0$ （依测度收敛于 0）的充要条件是

$$\int_E \frac{|f_k(x)|}{1 + |f_k(x)|} dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

七

设 $f \in L([0, 1])$ 且 $f \geq 0$, $\int_0^1 f(x) dx > 0$, $\alpha > 1$, 试求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \ln \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx.$$

八

- (1) 叙述 $[a, b]$ 上有界变差函数的定义。
- (2) 若 f 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 证明 f 有界。