

南开大学 2025-26 学年第一学期数学分析 III 期末考试 (大类)

命题人：李佳傲

回忆人：矜持

一 (20 分)

求下列级数的和

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{2n-1}}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n!}$$

二 (15 分)

讨论函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n \sqrt{n+1}}$$

的收敛域，并判定其在收敛域内的一致收敛性。

三 (20 分)

(1)(10 分) 用傅里叶级数求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

(2)(10 分) 利用上述级数结果，计算积分：

$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$$

四 (15 分)

设 $f(x, t)$ 是定义在 $[a, b] \times D$ 上的二元函数 ($D \subseteq \mathbb{R}$)。对每个 $t \in D$, $f(x, t)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积。 t_0 是 D 的聚点。若当 $t \rightarrow t_0$ 时, $f(x, t)$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛到 $h(x)$ 。试证明: $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且满足:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) \right) dx = \int_a^b h(x) dx$$

五 (15 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且对于任意 $A > 0$ ，积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 均收敛。

(1)(10 分) 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$ ($a, b > 0$)。

(2)(5 分) 利用上述公式，求 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x - \arctan x}{x} dx$ 。

六 (15 分)

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + (1 + \frac{x}{n})^n} dx$$