南开大学2025-2026高等代数与解析几何2-1期末考试

第一题

计算

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

第二题

现有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

记其系数矩阵为$\mathbf{A}$, 其中元素a_{ij}对应的代数余子式$\mathbf{A_{ij} \neq 0,}$
证明: $\mathbf{(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})^T}$是这个方程组的基础解系

第三题

数域$\mathbb{P}$上的n阶非齐次线性方程组

$$\mathbf{AX = b}$$

有特解η^*, 以及基础解系$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$,
证明:
(a) $\eta^*,\ \eta^* + \xi_1\ ,\ \eta^* + \xi_2\ ,\ \ldots\ ,\ \eta^* + \xi_{n-r}$线性无关
(b) 现有$n-r+1$个线性无关的方程组的解向量$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r+1}$.
注: (a)中已经给出其存在性
证明: 对于任意一个解x_0, 都有存在这样的$k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-r+1$使

$$x_0 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

且满足

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$$

第四题

解矩阵方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

第五题

已知直线 $l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$ 和 $l_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$
试求l_1, l_2 之间的距离及二者的公垂线

第六题

试证向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面当且仅当 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 共面

第七题

已知矩阵$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足$\mathbf{A^2} = \mathbf{A}, \mathbf{B^2} = \mathbf{B}$, 另有矩阵$\mathbf{E} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})$可逆
证明: $rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{B})$