

26 春大类实变期中

一、设集合列 (A_k) 满足 $A_{2n-1} = \left[0, 1 + \frac{1}{2n-1}\right)$, $A_{2n} = \left[0, 2 - \frac{1}{2n}\right)$, 求 $\limsup A_k$ 与 $\liminf A_k$.

具体数据可能有偏差，但大意是一个递减子列，一个递增子列。

二、设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 证明 $A' = (\overline{A})'$.

三、设

$$G = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \geq 0\}, \quad F = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_{n+1} \geq x_n \geq 0\}$$

证明 F 与 G 等势。

四、

1. 证明 \mathbb{R} 的可数子集是零测集。
2. \mathbb{R} 的稀疏子集是否一定零测？证明或给出反例。

五、设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，证明

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$$

是 \mathbb{R}^2 的零测子集。

六、设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 可测，且 $m(A) < +\infty$. 若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$, 证明：每个 A_n 均是可测集。

七、构造 \mathbb{R} 上外测度为 1 的不可测集，并证明。

八、设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 可测，且 $m(A) > 0$. 证明：

1. 任取 $\beta \in (0, 1)$, 存在开区间 I 使得 $\beta m(I) < m(A \cap I)$;
2. 存在 $\delta > 0$ 使得

$$(-\delta, \delta) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : m(A \cap (x + A)) > 0\}.$$