2025 2026 学年第一学期微分流形期末考试 (B 卷)

命题人: 王文龙

考试时间: 2026 年 1 月 13 日 12:00-13:40

说明: 这是缓考所用试卷. 第 1-5 题每题 12 分, 第 6-7 题每题 20 分.

1. 陈述切向量、切空间的定义.

2. 陈述正则值的定义和正则值原像定理的内容.

3. 维数高于 2 的欧氏空间中的开集的闭包是否一定是带边拓扑流形 (即带边 C^0 流形)? 如果是, 给出证明; 如果不是, 构造反例.

4. 证明: Lie 群同态是常秩映射.

5. 设 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的微分形式 $\omega = \sum_1^n \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^{i+n}$。假如已知存在光滑 1-形式 f 和光滑向量场 X 使得 $i_X\omega = \mathrm{d}f$, 证明 $L_X\omega = 0$(本题允许直接使用课上讲过的公式).

6. 在 $\mathbb{R}^5$(注意空间维数是 5) 中计算由下列向量场生成的光滑单参数变换群:

$$Z(x) = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - (x^3+1)\frac{\partial}{\partial x^3} + 2026\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

7. 设 M 是微分流形, 用 $L(M)$ 表示 M 上处处线性无关向量场的最大个数.

   (a) 若 M 是 n 维 Lie 群, 证明 $L(M) = n$.

   (b) 证明明 $L(S^1) = 1, L(S^3) = 3$.

   (c) 证明 $L(S^n \times S^1) = n + 1$.

   (d) 若 m 是奇数, 证明 $L(S^m) \geq 1$.

   (e) 若 m 是奇数, 是否一定有 $L(S^n \times S^m) = n + m$? 简要说明判断理由.