最优化方法期末（B 卷）

2026.1.19

1. $f(x)$ 二阶可微，证明：$f(x)$ 是 m-强凸的当且仅当 $\nabla^2 f(x) - mI$ 半正定。

2. 用大 M 法求解线性规划：

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. (1) 采用最速下降法 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$，证明：

(i) d_k 是下降方向

(ii) 在精确线搜索的意义下，$d_{k+1}^T d_k = 0$

(2) 由拟牛顿方程：

$H_{k+1} = H_k + E_k$, $s_k = x_{k+1} - x_k$,$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$,$s_k = H_{k+1} y_k$

推导 DFP 迭代中的 E_k 的表达式

4. (1) 用 FR 法求解 $\min \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 x_2 - 2x_1$, 初始点 $(0, 0)$

(2) 分别用 Newton 法和阻尼 Newton 法求解 $\min 3x_1^2 + x_2^2$, 初始点 $(1, 1)$

5. 写出如下优化问题的 Lagrange 对偶函数：

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

6. $G, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$G$ 对称，写出如下问题的 KKT 条件：

$$\begin{aligned} \min\ & x^T G x + g^T x \\ \text{s.t. } & Ax \geq b \\ & x^T C x = d^T x \end{aligned}$$

7. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集，$B \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，证明存在 $\bar{x} \in A, \bar{y} \in B$ 使 $\|\bar{x} - \bar{y}\| = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$