2025-26 秋随机过程期末 (mch 老师)

2026 年 1 月 13 日

一、（10 分）记 $N(t)$ 为速率是 λ 的 Poisson 过程，求解 $\mathbb{E}[N(t)\cdot N(t+s)]$.

二、（10 分）令 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一系列独立服从 Poisson 分布的随机变量，且 $\mathbb{E}X_n=\lambda_n$，并令 $S_n=X_1+\dots X_n$. 证明：若 $\sum_n^{\infty}\lambda_n=\infty$，则 $S_n/\mathbb{E}S_n\to 1,\quad a.s.$

三、（20 分）证明如下定理：令 T_n 为第 n 个事件在参数为 λ 的 Poisson 过程中的到来时刻，令 $U_1\dots U_n\overset{iid}{\sim}U(0,1),V_k^n$ 为 $\{U_1,\dots U_n\}$ 中第 k 小的数，则 $(V_1^n,V_2^n,\dots V_n^n)$ 与 $(T_1/T_{n+1},\dots T_n/T_{n+1})$ 有相同的分布，且 $(T_1/T_{n+1},\dots T_n/T_{n+1})$ 与 T_{n+1} 无关.

四、（10 分）设 $\{S_n\}_{n\geq 0}$ 为简单对称随机游动，满足 $S_0=0$，并定义步长 $\xi_i:=S_i-S_{i-1},\quad i\geq 1$，其中 $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ 相互独立同分布，且 $\mathbb{P}(\xi_i=1)=\mathbb{P}(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}$. 令截至时刻 n 的运行最大值为 $M_n:=\max_{0\leq k\leq n}S_k$. 证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}[M_n]}{\mathbb{E}[|S_n|]}=1$.

五、（20 分）考虑整数点上的一个简单随机游动，其中一质点每一步朝正方向移动一步的概率为 p，朝负方向移动一步的概率也为 p，而以概率 $q=1-2p\quad\left(0<p<\frac{1}{2}\right)$ 留在原处。假设在原点放置一个吸收壁（即 $P_{00}=1$），而在 N 处放一反射壁（即 $P_{N,N-1}=1$），又质点起始于 n $(0<n<N)$。证明：质点被吸收的概率为 1，且求被吸收所需的平均步数。

六、（10 分）证明：在一个有限马尔可夫链中无零常返状态，且不可能所有的状态都是非常返的。

七、（20 分）设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为一更新过程（$N(0)=1$），其来到间隔分布为 F，以 S_n 表示第 n 次来到时刻，以 $X_{N(t)}$ 表示包含 t 点的更新区间的长度，即 $X_{N(t)}=S_{N(t)}-S_{N(t)-1}$.

(i) 试证明 $\mathbb{P}(X_{N(t)+1}>x)\geq 1-F(x)$ 对于所有的 $x>0$ 都成立。

(ii) 当 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ 时，精确地计算 $\mathbb{P}(X_{N(t)+1}>x)$。