2025秋季研究生测度论与概率论基础

一. 令$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$是一测度空间。

(1). 叙述σ-代数和测度的定义.

(2). 设$\mathcal{G}$是一集类，且$\Omega\in\mathcal{G}$，任给$A,B\in\mathcal{G}$, 有$A\backslash B\in\mathcal{G}$，证明$\mathcal{G}$是代数. 判断$\mathcal{G}$是否是$\sigma$-代数.

二. 设有可测函数列$\{f_n\}$和可测函数f.

(1). 叙述$\{f_n\}$依测度收敛到f的定义. 证明条件

$$\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|>0)=0$$

蕴含

$$f_n\xrightarrow{\mu}f.$$

(2). 反过来，f_n依测度收敛到f蕴含(1)中的条件吗？证明或给出反例.

三. 设$\{\mathcal{F}_n\}$是概率空间上的一列σ-代数集，X_n是$\mathcal{F}_n$上的随机变量.

(1). 叙述稳流和下鞅的定义.

(2). 设X_n是单增的随机变量，证明离散随机过程$\{E[X_n|\mathcal{F}_n]\}$是下鞅.

四. 记$(\Omega,\mathcal{F})$是一可测空间. $w_1,w_2\in\Omega$. $\alpha_1,\alpha_2\in\overline{\mathbb{R}^+}\cup\{+\infty\}$.

(1). 对$A\in\mathcal{F}$，令

$$\mu:A\to\sum_{w_i\in A}\alpha_i.$$

特别地，$\mu(\varnothing)=0$. 假设$\{A_n\}\subset\mathcal{F}$且$A_n\downarrow\{w_1\}$，求

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(2). 设f是$\mathcal{F}$上的可测函数，且满足$\alpha_1f(w_1)+\alpha_2f(w_2)\geq 0$. 证明:

$$\mu(f)=\alpha_1f(w_1)+\alpha_2f(w_2).$$