# 2025-26 秋图论期末

2026 年 1 月 14 日

一、 （10 分）证明：对于任意连通图 $G$ 以及 $G$ 的一个无圈子图 $H$, 都存在 $G$ 的生成树 $T$ 使得 $H \subseteq T \subseteq G$

二、 （10 分）图 $G$ 中极大匹配大小最少是最大匹配的一半。

三、 （10 分）取整数 $k \geq 2$。设图 $G$ 是 $k-$ 连通图，顶点 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是 $G$ 的 $k$ 个不同的顶点。证明：$G$ 中存在一个圈，其顶点包含 $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

四、 （10 分）设 $G$ 是一个至少 4 个顶点的简单平面图，证明：$G$ 至少有 4 个顶点的度不超过 5。

五、 （15 分）设 $G$ 为 $n$ 个顶点上的 $d$-正则图。证明：图 $G$ 中存在大小至少为 $\frac{d}{2(d+1)}n$ 的匹配。

六、 （15 分）证明：不存在 $k+1$ 个顶点的 $k$-临界图。

七、 （15 分）设 $G = (V, E)$ 是一个简单图。证明：

(i) $G$ 中存在一个子图 $H$，使得 $\delta(H) > \frac{1}{2}\bar{d}(G)$;

(ii) 设 $T$ 是一棵包含 $t$ 个顶点的树。设 $G$ 是一个包含 $n$ 个顶点的简单图。请证明：如果图 $G$ 的边数 $e(G)$ 满足：$e(G) \geq (t-2)n + 1$ 则图 $G$ 必定包含 $T$ 作为其子图。

八、 （15 分）图 $G$ 有 $n$ 个节点。

(i) 设 $V(G)$ 存在 $k$ 个集合的划分 $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$。若满足条件：$\forall i \neq j, \exists x \in V_i, y \in V_j$ 使得$xy \notin E(G)$ 试证：

$$\chi(G) \leq n - k + 1$$

(ii) 试证图 $G$ 及其补图 $\overline{G}$ 的色数满足

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$$

*(注：命题人为艾江东老师；前 6 题为作业题)*