

2025 - 2026 数值分析

命题人：吴春林，赵志勇

1. (a) 将 $(0.125)_8$ 转化为二进制。
(b) 将 $(0.875)_{10}$ 转化为二进制。
(c) $f(x) = 3x^4 + 1$, 求差商 $f[3^0, 3^1]$, $f[3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4]$ 。
2. (a) $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x \in [0, 2]$ 。求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 的最佳一次一致逼近多项式（不要求化为小数）。
(b) 求不超过 2 次的多项式 p_2 , 使

$$p_2(-1) = 2, \quad p_2(2) = 2, \quad p_2(3) = 1$$

（化为最简形式）。

- (c) 写出切比雪夫多项式的递推公式，并给出证明。

3.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}$$

- (a) 写出线性方程组的系数矩阵 A , 并求出 A 的列和范数 $\|A\|_1$ 与 A 的行和范数 $\|A\|_\infty$ 。
- (b) 使用 LU 分解法解出方程组的精确解（不要求化为小数）。
- (c) 写出使用 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵，并判断迭代法的收敛性。
- (d) 给出求解 A 的最小特征值的算法，并计算一步。

注：这里第四问计算一步没有给出计算的初值，考试时老师说随便选一个初值计算。

4. 求积公式 $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_3 f(-x_1)$ 。

- (a) 求 A_1, A_2, x_1 , 使求积公式具有尽可能高的代数精度。
- (b) 确定上述求积公式的代数精度，并判断它是否为 Gauss 型求积公式。

5. 方程 $x^2 - a = 0$ 的迭代格式为 $x_{k+1} = px_k + \frac{qa}{x_k} + \frac{ra^3}{x_k^5}$ 。求 p, q, r ，使该迭代法具有尽可能高的收敛阶，并确定收敛阶。
6. f 为 $[a, b]$ 上连续函数， P_n 为次数不超过 n 的多项式空间， $E_n(f)$ 为 f 到 P_n 的距离。证明 $E_n(f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 。

回忆人：洛水天依