2025-2026 学年高等代数与解析几何 2-1 期末考试

回忆：凛素子

2026 年 1 月 15 日

1. 求行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. 已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_1 = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_n + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A, $|A| = 0$, A 的第 i 行第 j 列的代数余子式为 A_{ij}, 求证：若存在 $A_{ij} \neq 0$, 则 $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})^T$ 为给出方程组的一个基础解系。

3. 已知 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$，其中 A 的秩为 r，

   (a) 若 η^* 为方程组的一特解，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 为方程组对应齐次线性方程组的一基础解系，求证：$\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \ldots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关。

   (b) 若 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关，且为方程组的 $n - r + 1$ 个特解，求证：方程组的任意解可以表示为：

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

   其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$。

4. 求矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 已知异面直线 $L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$, $L_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$，求 L_1, L_2 的距离与公垂线方程。

6. 求证：几何向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 共面。

7. 已知 A, B 为阶数相同的方阵，$A^2 = A$, $B^2 = B$，$E - (A + B)$ 可逆，求证：A, B 秩相同。