

南开大学 2025-2026 学年度第一学期

数学省身班数学分析 III 期末考试

考试时间：2026 年 1 月 16 日 14:00~15:40 满分：100 分

作者：淘气的小杨桃

一、(15 分) 考虑下列函数

$$f_n(x) = nx e^{-nx^2}, n = 1, 2, \dots$$

(1) 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 不是一致收敛的;

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

二、(20 分) 求下列幂级数的收敛半径, 在端点处讨论幂级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6\sqrt{n}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot x^n$.

三、(15 分) (1) 证明: $\int_0^1 x^{p-1} (1 - x^m)^{q-1} dx = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$;

(2) 证明下面等式的成立:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2n}}} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^{2n}}} dx = \frac{\pi}{2n}.$$

四、(15 分) 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx (b > a > 0).$$

五、(20 分) 已知数列 $\{q_n\}$ 是实数列, 该数列单调递减且极限为 0, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$,

证明:

(1) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \sin nx$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上连续;

(2) 若 $g(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \sin nx$ 是 $g(x)$ 的傅里叶级数.

六、(15 分) 积分 $f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{1 + x^2} dx$. 证明:

(1) $f(t)$ 在 \mathbb{R} 上连续;

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$;

(3) $f(t)$ 在 $[0, \pi]$ 上至少有一个零点.