

南开大学 2025-2026 学年度第一学期

数学省身班复变函数期末考试

考试时间：2025 年 12 月 14 日 10:00~11:40 满分：100 分

作者：淘气的小杨桃

一、(本题 20 分) 设 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是整函数，证明

$$\left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

二、(本题 15 分) 已知 $P(z)$ 是 m 次多项式函数，当 $|z| = 1$ 时， $|P(z)| \leq K$ ，求

证：当 $|z| = r$ 时， $|P(z)| \leq Kr^m$.

三、(本题 20 分) 当 $a > 0$ ，用留数定理计算： $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$.

四、(本题 15 分) 设 f 在 $0 < |z - z_0| < R$ 中解析， $\operatorname{Re} f(z) \leq M$. 求证 z_0 是 f 的可去奇点.

五、(本题 15 分) 设 f 在 $|z| < R$ 中解析， $|f(z)| \leq M$, $f(0) = 0$ ，请不用 Schwarz 定理证明下面两个不等式： $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$, $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}|z|$.

六、(本题 15 分) 求在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| \equiv 1$ 的整函数 f 的全体.