

# 南开大学 2025-2026 学年度第一学期

## 数学省身班复变函数期末考试

考试时间：2025 年 12 月 14 日 10:00~11:40 满分：100 分

作者：淘气的小杨桃

一、(本题 20 分) 设  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  是整函数, 证明

$$\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

二、(本题 15 分) 已知  $P(z)$  是  $m$  次多项式函数, 当  $|z| = 1$  时,  $|P(z)| \leq K$ , 求证: 当  $|z| = r$  时,  $|P(z)| \leq Kr^m$ .

三、(本题 20 分) 当  $a > 0$ , 用留数定理计算:  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ .

四、(本题 15 分) 设  $f$  在  $0 < |z - z_0| < R$  中解析,  $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ . 求证  $z_0$  是  $f$  的可去奇点.

五、(本题 15 分) 设  $f$  在  $|z| < R$  中解析,  $|f(z)| \leq M$ ,  $f(0) = 0$ , 请不用 Schwarz 定理证明下面两个不等式:  $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$ ,  $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$ .

六、(本题 15 分) 求在  $|z| = 1$  上  $|f(z)| \equiv 1$  的整函数  $f$  的全体.