2025–2026 学年度省身班数理方程期末考试试卷

命题人：魏雅薇

一、（15 分）

设 $G(P,Q)$ 为如下边值问题的 Green 函数：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases}$$

证明 Green 函数的对称性：

$$G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1).$$

二、（15 分）

利用分离变量法求解下列初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 1, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right), & 0 < x < l. \end{cases}$$

三、（15 分）

求波动算子

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$$

的基本解，其中空间维数为 $n = 3$，时间满足 $t > 0$。

四、（15 分）

利用能量法证明 $1+2$ 维波动方程 Cauchy 问题解的唯一性：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y). \end{cases}$$

五、（15 分）

考虑 Poisson 方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$，$u \in H_0^1(\Omega)$。

设 u 为弱解。证明：对任意满足 $\Omega' \Subset \Omega$ 的子区域 Ω'，有

$$u \in H^2(\Omega'),$$

并且存在常数 C，使得

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C\big(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

其中常数 C 仅依赖于空间维数 n 及距离 $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$。

六、（15 分）

考虑热方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u|_{\partial_p Q_T} = 0, \end{cases}$$

其中 $\partial_p Q_T$ 表示抛物型边界。叙述 Lax–Milgram 定理在该热方程中的变体形式，并证明该方程在 $\dot{W}_2^{1,1}(Q_T)$ 中存在弱解。

七、（10 分）

证明在分布意义下有

$$H'(x) = \delta(x),$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 函数，$\delta(x)$ 为 Dirac δ 分布。