# 2025–2026 学年度数学类泛函分析期末测试

出题人：李磊

1. 设 $P[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的实系数多项式集合，定义距离 $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$。证明：

   (a) $P[0,1]$ 不完备；

   (b) 写出 $P[0,1]$ 的完备化（不需要证明）。

2. 设 $E$ 是赋范空间，且 $A$、$B$ 是 $E$ 的子集，$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$。若 $A$ 或 $B$ 为开集，求证：$A+B$ 也是开集。

3. 设 $x,y$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间 $X$ 中的元素。求证：$x\perp y$ 当且仅当对任意 $\lambda\in\mathbb{K}$，有 $\|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\|$。

4. 定义算子 $T: l^1\to l^\infty$，$T(x)=\left(\dfrac{x_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^1$。求证：$T$ 是有界线性算子，且 $\|T\|=\dfrac{1}{2}$。

5. 设 $X$ 为内积空间，$x_0\in X$。求证：$\|x_0\|=\sup_{x\neq 0}\dfrac{|\langle x_0,x\rangle|}{\|x\|}$。

6. 设 $X$ 是赋范空间，$M$ 是 $X$ 的子空间。求证：$\overline{M}=\bigcap\limits_{\substack{f\in X^*\\ M\subset\ker f}}\ker(f)$，其中 $\ker(f)=\{x\in X : f(x)=0\}$。

7. 设 $X$ 是 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 $X$ 中的元素列，$\{\lambda_n\}$ 是收敛到 0 的复数序列，且对任意 $f\in X^*$，有 $\sum_{n=1}^\infty |f(x_n)|<\infty$。求证：$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$ 收敛。