2025-2026 学年度数学类数理方程期末考试试卷

命题人：魏雅薇

1. 证明：若分布 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 满足 $f = 0$，则对任意开子集 $U \subset \Omega$，f 在 U 上的限制 $f|_U = 0$；反之，若 Ω 有一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$，且 f 在每个 U_α 上的限制 $f|_{U_\alpha} = 0$，则 f 在 Ω 上为 0。

2. 设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，证明：

(1) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$；

(2) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}$。

3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域，$G(P, Q)$ 是 Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & P \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

的 Green 函数。证明 Green 函数的对称性：

$$G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1), \quad \forall Q_1, Q_2 \in \Omega.$$

4. 求热传导算子 $\partial_t - a^2\Delta$ 的基本解。

5. 证明 Harnack 不等式：若 $u \geq 0$ 为区域 Ω 内的调和函数，且 $B_{4R}(Q) \subset \Omega$，则

$$\sup_{B_R(Q)} u \leq 3^n \inf_{B_R(Q)} u.$$

6. 用傅里叶方法求解弦振动方程初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = g_0(x), \quad u_t(x,0) = g_1(x), \\ u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(l,t) = \varphi_2(t). \end{cases}$$

7. 证明：

(1) 若 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$，则

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^{\alpha_1} f * \partial^{\alpha_2} g.$$

(2) 若 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，$g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$，则

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^{\alpha_1} f * \partial^{\alpha_2} g.$$