2025-2026 学年度数学类数值分析期末考试试卷

命题人：吴春林、赵志勇　　　　**考试时间：**2026 年 1 月 19 日 16:00-17:40

1. (1) 将八进制数 $(125)_8$ 化成二进制数。

   (2) 将十进制小数 $(0.875)_{10}$ 化成二进制数。

   (3) 设 $f(x) = 3x^4 + 1$，求差商 $f[3^0, 3^1]$ 和 $f[3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4]$。

2. (1) 设 $y(x) = \sqrt{x+3}$，求 $y(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最佳一次逼近多项式。

   (2) 求一个次数不高于 2 次的多项式 $p_2(x)$，使得 $p_2(-1) = 2$，$p_2(2) = 1$，$p_2(3) = 2$。（需将 $p_2(x)$ 化简至最简形式。）

   (3) 写出并证明切比雪夫多项式的递推关系。

3. 考虑线性方程组：

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 10x_2 - 2x_3 = -10, \\ -x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 10. \end{cases}$$

   (1) 求系数矩阵 A 的行和范数 $\|A\|_\infty$ 和列和范数 $\|A\|_1$。

   (2) 用 LU 分解的方法求解该线性方程组。（结果不必化成小数）

   (3) 写出求解该方程组的 Gauss-Seidel 迭代方法的迭代矩阵，并分析迭代法的收敛性。

   (4) 写出求系数矩阵 A 的按模最小特征值及其对应的特征向量的算法，并计算一步。（结果不必化成小数）

4. (1) 求常数 A_1、A_2 和节点 x_1，使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1)$$

   具有尽可能高的代数精度。

   (2) 求出 (1) 中求积公式的代数精度，并判断该公式是否为 Gauss 求积公式。

5. 设 $a > 0$，求解非线性方程 $x^2 - a = 0$ 的迭代格式为

$$x_{k+1} = p x_k + \frac{qa}{x_k} + \frac{ra^3}{x_k^5},$$

   试确定参数 p, q, r 使得其收敛阶数尽可能高，并求出此时的收敛阶。

6. 设 P_n 是 n 次多项式空间，f 是区间 $[a, b]$ 上的一个连续函数，定义 $E_n(f)$ 为一致范数意义下 f 到 P_n 的距离，求证：

$$E_n(f) \to 0 \quad (n \to \infty).$$