2025–2026 学年度数学类抽象代数期末考试试卷

命题人：王秀玲

一、在多项式环 $\mathbb{Z}_6[x]$ 中计算 $(4x^3+x+1)(x+3)$。

二、设 R 是一个无零因子环，且存在非零元 $x \in R$ 满足 $x^2 = x$。证明：R 含有幺元。

三、设

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) 证明：M 是一个域；

(2) 设 $f : \mathbb{C} \to M$ 是一个同构，并且对任意 $a \in \mathbb{R}$，有 $f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$。证明：或者对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，$f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$，或者对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，$f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$。

四、设 $n \in \mathbb{Z}$，证明：$\mathbb{Z}[x]$ 中的理想 (n, x) 是极大理想，当且仅当 n 是素数。

五、设 α 是多项式 $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的一个根。

(1) 证明：$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$；

(2) 将 $(1-\alpha)^{-1}$ 表示为 $1, \alpha, \alpha^2$ 的线性组合。

六、设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$。

(1) 设 $a + b\sqrt{-5} \in R$，证明：若 $a^2 + 5b^2 = 9$，则 $a + b\sqrt{-5}$ 是 R 中的不可约元；

(2) 证明：在 R 中，$6 + 3\sqrt{-5}$ 与 9 没有最大公因子。

七、设 f, g 是域 F 上的不可约多项式，E 是 F 的一个扩域，$\alpha, \beta \in E$ 分别是 f, g 的一个根。证明：f 在 $F(\beta)$ 中可约 $\Longleftrightarrow$ g 在 $F(\alpha)$ 中可约。

八、证明：$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ 不是欧几里得整环。