

2025–2026 学年度《变分学》期末考试

命题人：朱朝峰

考试时间：2026 年 7 月 2 日 14:00–15:40

1. 设 $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 绝对连续, 其几乎处处导数 φ' 平方可积, 且 $\varphi(a) = 0$. 证明

$$\int_a^b \varphi(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \varphi'(x)^2 dx.$$

2. 设 $L = L(t, u, p)$ 可微, 在 $J = [a, b]$ 上关于 (u, p) 严格凸, 且下方有界. 设 $M = C_0^1(J)$. 若 $u_0 \in M$ 是 L 的 E-L 方程的解, 证明 u_0 是泛函

$$I(u) = \int_J L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

在 M 上的唯一严格极小点。

3. 设 X 是实线性空间, V, W 是 X 的线性子空间, 满足 $X = V \oplus W$, 且 $\dim W < +\infty$. 设 $Q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非退化双线性形式, 并定义

$$V^Q = \{x \in X : Q(x, y) = 0, \forall y \in V\}.$$

证明 $\dim V^Q \leq \dim W$.

4. 设 X, X^* 是实线性空间, 且 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ 是非退化双线性形式, 则称 $(X, X^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为对偶对. 记 $\sigma(X, X^*)$ 为 X 上的弱拓扑. 试写出 $\sigma(X, X^*)$ 在 0 处的一个邻域基, 并证明 $(X, \sigma(X, X^*))$ 是局部凸 Hausdorff 空间。

5. 设 $(X, X^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是对偶对, $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个函数. 定义 F 的上图

$$\text{epi } F = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq a\}.$$

现设 $\text{epi } F$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 中的闭凸集. 记连续仿射弱函数的集合为

$$M(F) = \{(x^*, m) \in X^* \times \mathbb{R} : \langle x, x^* \rangle - m \leq F(x), \forall x \in X\}.$$

证明 F 是 $M(F)$ 中函数的逐点上确界, 即

$$F(x) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - m : (x^*, m) \in M(F)\}, \quad \forall x \in X.$$

Recalled by Annalicia Koirishi.