泛函分析 2025-2026 期末试卷

回忆：Eurekaimer

关于题设条件中所处空间的部分可能有误

1. 设 $P[0,1]$ 为实多项式空间，定义度量 $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$。

(1) 试证明 $(P[0,1],d)$ 是不完备的度量空间；

(2) 试指出该空间的完备化空间是什么？（不用证明）

2. 设 A,B 是赋范空间中的两个子集。若 A 和 B 中至少有一个是开集，试证明它们的和集 $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ 也是开集。

3. 设 X 为 Hilbert 空间，对于 $x,y\in X$，证明：

$$x\perp y \iff \|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\|, \quad \forall\lambda\in\mathbb{K}$$

4. 设 $T: l^1\to l^\infty$ 为线性算子，定义为

$$Tx=\left(\frac{x_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

试证明 T 是有界线性算子，且其算子范数 $\|T\|=\frac{1}{2}$。

5. 设 X 是 Hilbert 空间，$x_0\in X$。试证明：

$$\|x_0\|=\sup_{0\neq x\in X}\frac{|\langle x_0,x\rangle|}{\|x\|}$$

6. 设 X 是赋范空间，M 是 X 的子空间。试证明 M 的闭包 $\overline{M}$ 满足：

$$\overline{M}=\bigcap_{\substack{f\in X^*\\ M\subseteq\ker f}}\ker f$$

其中 $\ker f=\{x\in X \mid f(x)=0\}$。

7. 设 X 是 Banach 空间，序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$。已知对于任意的 $f\in X^*$，均有

$$\sum_{n=1}^\infty |f(x_n)|<\infty$$

且数列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$。试证明：级数 $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$ 在 X 中收敛。