2025-2026 学年度傅里叶分析期末考试试卷（A 卷）

命题人：陈婷

1. 叙述 Young 不等式的内容，并使用插值定理证明之。

2. 设 $K \in L(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} K = a$，并设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上有界且一致连续的函数。求证：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(K_\varepsilon * f)(x) - af(x)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0^+.$$

3. 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$，用算子族收敛定理证明：对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$，都有

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x).$$

4. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$0 < \alpha < n$，$1 \le p < n/\alpha$，记

$$I_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy.$$

   求证：

$$|I_\alpha(x)| \le C_{n,p,\alpha}\|f\|_p^{p\alpha}(Mf(x))^{1-p\alpha/n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

   其中 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子。

5. 证明傅里叶变换 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是连续双射。（其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 函数全体）

6. 证明傅里叶变换 $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续双射。（其中 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布全体）

7. 设 $x \in \mathbb{R}$，已知 p.v.$\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$，求出 p.v.$\frac{1}{x}$ 的傅里叶变换。