25级数学分析I第1次月考试题参考解答

一、(本题共15分，其中第1问5分，第2问10分)

(1) 用$\varepsilon-\delta$语言陈述“$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$”.

(2) 用函数极限定义的否定来证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(\ln x)$不存在.

(1) **答**　存在$\varepsilon_0>0$, 对任何$\delta>0$, 都存在$x_\delta\in(x_0,x_0+\delta)$, 使得$|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

(2) **证**　对任意实数A, 取$\varepsilon_0=1$, 对任何$\delta>0$, 取正整数n使得$-2n\pi<\ln\delta$, 若$A\geqslant 0$, 则取$x_\delta=\mathrm{e}^{-2n\pi-\frac{\pi}{2}}>0$, 由$\ln x_\delta=-2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<\ln\delta$得$x_\delta<\delta$, 故$x_\delta\in(0,\delta)$且$|\sin(\ln x_\delta)-A|=|-1-A|\geqslant 1=\varepsilon_0$; 若$A<0$, 则取$x_\delta=\mathrm{e}^{-2n\pi-\frac{3\pi}{2}}>0$, 由$\ln x_\delta=-2n\pi-\dfrac{3\pi}{2}<\ln\delta$得$x_\delta<\delta$, 故$x_\delta\in(0,\delta)$且$|\sin(\ln x_\delta)-A|=|1-A|>1=\varepsilon_0$. 因此，由函数极限定义的否定知$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(\ln x)$不存在. □

二、(本题共15分) 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k+\cos k}{(k+\sin k)(k-\cos k)}$, $n=1,2,\cdots$. 证明：数列$\{x_n\}$收敛.

证　不妨令$m>n>1$, 就有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin k+\cos k}{(k+\sin k)(k-\cos k)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{|\sin k+\cos k|}{(k+\sin k)(k-\cos k)}\\ &\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{2}{(k-1)^2}<\sum_{k=n+1}^{m}\frac{2}{(k-2)(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{2}{k-2}-\frac{2}{k-1}\right)\\ &=\frac{2}{n-1}-\frac{2}{m-1}<\frac{2}{n-1}\leqslant\frac{4}{n}.\end{aligned}$$

对于任给的$\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]+1$, 于是当$m>n>N$时，就有

$$|x_m-x_n|<\frac{4}{n}<\varepsilon.$$

由柯西收敛原理知数列$\{x_n\}$收敛. □

三、(本题共15分) 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi x}{2}}}{\left(\sqrt[3]{8-7x}-1\right)\cos\frac{\pi x}{2}}$.

解 令$y=x-1$, 则$x\to 1$时有$y\to 0$, 当$x\neq 1$时有$y\neq 0$, 故由变量代换的方法得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi x}{2}}}{\left(\sqrt[3]{8-7x}-1\right)\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos\frac{\pi y}{2}}}{\left(\sqrt[3]{1-7y}-1\right)\left(-\sin\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\cos\frac{\pi y}{2}-1}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-7y}-1\right)\left(\sin\frac{\pi y}{2}\right)}.$$

因为当$x\to 0$时，有$\sin x\sim x$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ $(\alpha\neq 0)$, 所以由等价无穷小量替换的方法得

$$\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\cos\frac{\pi y}{2}-1}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-7y}-1\right)\left(\sin\frac{\pi y}{2}\right)}=\mathrm{e}\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi y}{2}-1}{\frac{-7y}{3}\cdot\frac{\pi y}{2}}=\mathrm{e}\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi y}{2}\right)^2}{-\frac{7\pi y^2}{6}}=\frac{3}{28}\mathrm{e}\pi.$$

因此，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi x}{2}}}{\left(\sqrt[3]{8-7x}-1\right)\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{3}{28}\mathrm{e}\pi.$$

□

四、(本题共15分，其中第1问9分，第2问6分) 设$\{y_n\}$是一个给定的数列.

(1) 证明：对任意正整数n, 存在唯一的实数x_n, 使得$x_n^7+\arctan(x_n^5)=y_n$.

(2) 证明：若数列$\{y_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$也收敛.

证 (1) 令$f(x)=x^7+\arctan(x^5)$, 则由初等函数的连续性定理知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续. 由x^7, x^5和$\arctan x$都是$(-\infty,+\infty)$上的严格递增函数知$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格递增函数，从而$f(x)$是单射. 由无穷大量的性质知$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 于是对任意实数$y$, 存在实数$a<0$使得$f(a)<y$, 存在实数$b>0$使得$f(b)>y$. 由介值定理知存在$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=y$, 故函数$f(x)$的值域是$\mathbb{R}$. 由$f(x)$是单射知$\xi$是唯一的. 因此，对任意正整数$n$, 存在唯一的实数$x_n$, 使得$f(x_n)=y_n$. 这就完成了(1)的证明.

(2) 由数列$\{y_n\}$收敛知数列$\{y_n\}$有界，于是存在$M>0$使得$|y_n|\leqslant M$. 由函数$f(x)$的值域是$\mathbb{R}$知存在实数α, β使得$f(\alpha)=-M$, $f(\beta)=M$. 由$f(x)$的严格递增性知$\alpha<\beta$. 由$f(x)$是单射知$f(x)$有反函数$f^{-1}(y)$, 由反函数的连续性定理知$f^{-1}(y)$在$[-M,M]$上连续. 记$Y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,

则$Y \in [-M, M]$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(Y).$$

这就完成了(2)的证明. □

五、(本题共15分) 已知圆周率π是无理数，求函数$f(x) = R(x)\sin(x) + D(x)\cos(x)$的间断点并指出间断点的类型，其中$R(x)$是黎曼函数，$D(x)$是狄利克雷函数.

解 函数$f(x)$的间断点集是$\mathbb{R} \setminus \left\{ x \,\middle|\, x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, 每个间断点都是第二类间断点. 证明如下.

由教材习题知对任意实数x_0, 都有$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. 又$\sin x$是有界量，故由无穷小量的性质得$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)\sin x = 0$. 由初等函数的连续性定理知对任意实数$x_0$, 都有$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$. 当$x_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$(其中$k$是整数)时，有$\cos x_0 = 0$, 又$D(x)$是有界量，故由无穷小量的性质得$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)\cos x = 0$; 当对任意整数$k$, 都有$x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$时，则$\cos x_0 \neq 0$, 由有理数集和无理数集都在实数集中稠密知存在有理数列$\{r_n\}$和无理数列$\{s_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = x_0$且$r_n > x_0,\ s_n > x_0,\ n = 1, 2, \cdots$, 这时有$\lim\limits_{n\to\infty} D(r_n)\cos r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\cos r_n = \cos x_0 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} D(s_n)\cos s_n$, 故由海涅定理知$\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)\cos x$不存在.

综合以上讨论知，当$x_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$(其中$k$是整数)时，有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, 由$\pi$是无理数知$x_0 = \dfrac{2k+1}{2}\pi$是无理数, 从而$R(x_0) = 0$, 进而有$f(x_0) = R(x_0)\sin x_0 + 0 = 0$, 按定义知$f(x)$在$x_0$处连续; 当对任意整数$k$, 都有$x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$时，右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$不存在(反证. 若不然，则$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在，由极限的四则运算法则知$\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)\cos x = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^+} R(x)\sin x = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 与$\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)\cos x$不存在矛盾)，因此$x_0$是$f(x)$的第二类间断点. □

六、(本题共15分，其中第1问9分，第2问6分) 设$\{x_n\}$是一个严格单调数列，令$y_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} |x_k - x_{n+1}|}$, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 证明：若数列$\{x_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

(2) 证明：对$x_n=\sqrt{n}$, $n=1,2,\cdots$, 有$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$.

证 (1) 不妨设数列$\{x_n\}$严格递增(严格递减的情形类似可证)，这时$y_n=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_{n+1}-x_k)}$, $n=1,2,\cdots$, 由均值不等式得

$$0<y_n\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{n+1}-x_k)}{n}=x_{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}.$$

因为数列$\{x_n\}$严格递增且有界，所以由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. 记$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 则由数列的有限多项不影响数列的极限知$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$. 由柯西命题知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}=a$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)=a-a=0.$$

因此由两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

(2) 先将y_n适当缩小，有

$$y_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{k}\right)}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{(n+1)-k}{\sqrt{n+1}+\sqrt{k}}}>\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{2\sqrt{n+1}}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{2\sqrt{n+1}}.$$

记$z_n=\frac{n!}{n^n}$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

由教材习题的结论“对于正数数列$\{x_n\}$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$”，就得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 于是由无穷大量的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{2\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{n}{2\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

再结合$y_n>\frac{\sqrt[n]{n!}}{2\sqrt{n+1}}$, $n=1,2,\cdots$就得到$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. □

七、(本题共10分) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{n}}{n}=2.$

证 当$k=1$时，有$\dfrac{\sqrt[k]{n}}{n}=\dfrac{n}{n}=1.$ 记$x_n=\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\sqrt[k]{n}}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

一方面，当$n>1$时，有

$$x_n>\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}1}{n}=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

故对任意$\varepsilon>0$, 取$N_1=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N_1$时，就有$x_n>1-\varepsilon.$

另一方面，当$n>1$时，对任意$\varepsilon\in(0,1)$, 记$m=\left[\dfrac{\ln n}{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]$, 则$m$是正整数. 当$k>m$时，就有$k>\dfrac{\ln n}{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$, 从而$\dfrac{\ln n}{k}<\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, 故$\sqrt[k]{n}<1+\dfrac{\varepsilon}{2}$. 当$m\geqslant n$时，约定$\sum\limits_{k=m+1}^{n}\sqrt[k]{n}=0$; 当$m<n$时，有

$$\frac{\sum\limits_{k=m+1}^{n}\sqrt[k]{n}}{n}<\frac{(n-m)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{n}<1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当$m=1$时，约定$\sum\limits_{k=2}^{m}\sqrt[k]{n}=0$; 当$m>1$时，因为当$n>1$时，有$\sqrt{n}>\sqrt[3]{n}>\sqrt[4]{n}>\cdots$, 所以

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{m}\sqrt[k]{n}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}<\frac{m}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{\ln n}{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

由教材练习题的结论“$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^s}=0\ (a>0,\ a\neq1,\ s>0)$”知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$, 故对上述$\varepsilon>0$, 存在正整数$N_2$, 使得当$n>N_2$时，有$\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此，当$n>N_2$时，就有

$$x_n=\frac{\sum\limits_{k=2}^{m}\sqrt[k]{n}}{n}+\frac{\sum\limits_{k=m+1}^{n}\sqrt[k]{n}}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+1+\frac{\varepsilon}{2}=1+\varepsilon.$$

对任意$\varepsilon\in(0,1)$, 令$N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当$n>N$时，就有$1-\varepsilon<x_n<1+\varepsilon$. 按数列极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{n}}{n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2.$ □