数学科学学院本科生2024 - 2025学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)　参考答案

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

得 分

一、(每题15分) 求解常微分方程

1.　$y' = \frac{-x+2y}{2x-y}$, $y(1) = 1$.

答: 令$u = \frac{y}{x}$, 代入方程可得$x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$, 分离变量法可得

$$ux = \frac{1}{C}e^{-\frac{1}{2u^2}},$$

利用初值条件可得$C = e^{-\frac{1}{2}}$,可得$y = e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2y^2}}$.

2.　$yy'' = 2(y')^2$.

答: 令 $p = y$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$。代入得 $py\frac{dp}{dy} = 2p^2$。$p = 0$ 时有解 $y = c$，$p \neq 0$ 时有解 $y = -(c_1x + c_2)^{-1}$。

草 稿 区

3.　$x'' + 2x' + 5x = \cos t.$

答: 特征根为$1+2i,\,1-2i$，齐次方程的通解为$c_1e^t\cos 2t + c_2e^t\sin 2t$, 非齐次方程的特解为$\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t$。

4.　$y'' + x^2y' - (\frac{2}{x^2} - x)y = 0$，$x > 0$，已知 $y = \frac{1}{x}$ 为一个解.

答: 设另外一个解为y, 则朗斯基行列式满足

$$\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = Ce^{-\frac{x^3}{3}},$$

也就是

$$(xy)' = Cx^2e^{-\frac{x^3}{3}},$$

容易计算出线性方程的另外一个解为$y = \frac{e^{-\frac{x^3}{3}}}{x}$。故通解两解的线性组合。

草 稿 区

得 分

二、(10分) 判断函数 $f(x,y)=\sqrt{|y|}\cdot\sin x$ 分别在 $G_1=[-\pi,\pi]\times(0,+\infty)$ 与 $G_2=[-\pi,\pi]\times(-\infty,+\infty)$ 内对 y 是否满足局部 Lipschitz 条件，说明理由。

答: f 在 G_1 内对 y 可导，故对 y 满足局部 Lipschitz 条件。
在 $(\pi/4,0)\in G_2$ 处，f 对 y 导数为无穷，故对 y 不满足局部 Lipschitz 条件。

草 稿 区

得 分

三、(10分) 证明：微分方程 $x'=y, y'=-x^3-y$ 的零解是渐进稳定的。

答: 利用Lyapunov函数

$$V(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{y^2}{2}+cx^3y \tag{1}$$

$$\geq \frac{x^4}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{cx^6}{2}-\frac{cy^2}{2}>0, \tag{2}$$

这里选择$c<1$.

$$\frac{dV}{dt}=x^3y+y(-x^3-y)+3cx^2y^2+cx^3(-x^3-y)=-y^2-cx^6-cx^3y\leq -y^2-cx^6+\frac{c}{2}x^6+\frac{cy^2}{2}<0$$

故零解是渐进稳定的。

草 稿 区

得 分

四、(10分) 已知 $\frac{dy}{dx}=x+\mu y^2$，$y(0)=\mu+1$，求 $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$。

答: $\mu=0$，方程的解为$y(x)=\frac{x^2}{2}+1$ 写成积分方程为

$$y(x)=\mu+1+\int_0^x s+\mu y^2 ds,$$

对μ求导得

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}=1+\int_0^x y^2+2y\mu\frac{\partial y}{\partial \mu}ds,$$

记$z=\frac{\partial y}{\partial \mu}$, z满足方程 $\frac{dz}{dx}=y^2+2\mu yz$, $z(0)=1$, 代入$\mu=0$，可得 $\frac{dz}{dx}=(\frac{x^2}{2}+1)^2, z(0)=1$，可得 $z=\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=1}=\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{3}+x+1$。

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设 $n \times n$ 矩阵函数 $\Phi(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可导，且 $\Phi(0)$ 为单位矩阵。证明：存在 $n \times n$ 常数矩阵 A 使得 $\Phi(t) = e^{tA}$ 的充要条件是，对任意实数 s, t 均有 $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$。

答: 必要性显然。下证充分性：对任意 s 及 $t \neq 0$，有

$$\frac{\Phi(s+t) - \Phi(s)}{t} = \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t}\Phi(s).$$

故 $\Phi'(s) = \Phi'(0)\Phi(s)$。取 $A = \Phi'(0)$ 即可。