本科生图论期中考试解答

2025 秋季学期

问题 1. 证明：连通图 G 的满足如下条件的子图 G' 的数量等于 2^{m-n+1}（其中 $m=|E(G)|, n=|V(G)|$）。

- 所有顶点的度数都是偶数；
- $V(G')=V(G)$。

证. 我们称满足该条件的子图为“良好”子图，对 G 边数用归纳法。当 G 边数为 $n-1$ 时，G 为树，其唯一“良好”子图是 $(V(G),\varnothing)$，满足条件（$2^{(n-1)-n+1}=1$）。

假设 G 是连通且含圈的，取 G 的一个圈 C，e 为圈上的一条边，则 $G-e$ 仍连通。G 中不包含 e 的那些“良好”子图正好是 $G-e$ 的“良好”子图，按照归纳假设，我们只需证明包含 e 的“良好”子图的数量与不包含 e 的“良好”子图数量是相等的。注意到 G_1 是 G 中一个包含 e 的良好子图，当且仅当 $(V(G),E(G_1)\triangle E(C))$ 是一个不包含 e 的良好子图。(考虑 G_1 中的任意一个顶点 v，若 v 关联的边与 $E(C)$ 的交集大小为 0，则做完对称差后 v 的度或者不变，或者增加 2，取决于 v 是否属于 $V(C)$；若 v 关联的边与 $E(C)$ 的交集大小为 1，则做完对称差后 v 的度不变，若 v 关联的边与 $E(C)$ 的交集大小为 2，则做完对称差后 v 的度减少 2，从而 v 的度奇偶性不变。) 这个对应关系是一一对应的，从而证明了这个断言。 □

问题 2. 设 T 是一棵树。任取顶点 $x\in V(T)$，定义函数 $s(x)=\sum_{y\in V(T)}\mathrm{dist}(x,y)$，其中 $\mathrm{dist}(x,y)$ 是树 T 中 x 到 y 的距离。证明：$s(x)$ 在树 T 上是严格凸的，即当 x 是 T 一个顶点而 y,z 是它的两个邻点时，有

$$2s(x)<s(y)+s(z).$$

证. 设 k_1,k_2 分别为 $G-x$ 中包含 y 和 z 的连通分量中的点的数量（显然，这些是不同的连通分量）。令 u 为 $G-x$ 中包含 y 的连通分量中的一个顶点，则在 T 中，$\mathrm{dist}(x,u)=\mathrm{dist}(y,u)+1$，令 v 为 $G-x$ 中包含 y 的连通分量以外的一个顶点，则在 T 中，$\mathrm{dist}(x,v)=\mathrm{dist}(y,v)-1$, 以

及 $0=\operatorname{dist}(x,x)=\operatorname{dist}(y,x)-1$. 因此

$$s(x)=s(y)+k_1-(n-k_1)=s(y)+2k_1-n.$$

类似地，有

$$s(x)=s(z)+2k_2-n.$$

综上可得

$$2s(x)=s(y)+s(z)+2(k_1+k_2-n)\leqslant s(y)+s(z)-2.$$

□

问题 3. *(a)* 设 $d(X)$ 表示图 G 的顶点集 X 与 $V\backslash X$ 之间的边数。证明如下不等式：

$$d(X\cup Y)+d(X\cap Y)\leqslant d(X)+d(Y),\quad X,Y\subseteq V(G).$$

(b) 设 G 是一个 k-边连通的图，且删掉 G 中任意一条边后，都会使 G 的边连通度降为 $k-1$。证明：G 中存在一个度为 k 的顶点。

证. (a) 分块计数即可：每一条连接 $X\cap Y$ 和 $V(G)-X-Y$ 的边在两边都被计算了两次。连接 $X-Y$ 和 $Y-X$ 的边仅在右侧被计算。任何其他边在两边各被计算一次。

(b) 令 X 为满足 $d(X)=k,|X|$ 最小的集合，取 $x\in X$。如果所有与 x 相连的边都指向 $V(G)-X$，那么它们的数量 $\leqslant d(X)=k$，因此 x 的度数 $\leqslant k$。根据 k 边连通性，我们在这里会取等。

假设 x 与 $y\in X$ 相邻。去掉边 xy 后，边连通性降低，因此存在一个非空的 $Z\subset V(G)$，使得 $d_{G-xy}(Z)\leqslant k-1$。这只有在 $d(Z)=k$ 且 Z 将 x 和 y 分开时才成立，不妨假设 $x\in Z,y\in V(G)-Z$。我们可以假设 $X\cup Z\neq V(G)$，否则我们可以考虑 $V(G)-Z$ 而不是 Z。由(a)，有

$$d(X\cap Z)+d(X\cup Z)\leqslant d(X)+d(Z).$$

这里有 $d(X\cap Z)\geqslant k$，$d(X\cup Z)\geqslant k$，$d(X)=d(Z)=k$。因此，我们必须有在整个过程中保持等式，特别是 $d(X\cap Z)=k$。这与 X 的最小性相矛盾。

□