

任课教师:

专业:

年级:

学号:

姓名:.

成绩:

草稿区

得分

一、(判断级数收敛性)(30分,每题15分).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n+a}\right)^n \quad (a > 0)$$

得分

二、(15分) 讨论

$$\iint_{\{x^2+y^2>1\}} \frac{\cos x^2}{x^2+y^2} dx dy$$

广义二重积分的收敛性.

草稿区

草稿区

得分

三、(10分) 设 $p > 0, q > -1$, 讨论广义积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q}{x^p + 1} \cos x dx$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

得分

草稿区

四、(15分) 设 $p \geq 0$, 数列 a_n 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = n^{-p} \arctan a_n$, 判断并证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

的收敛性.

得分

五、(15分) 讨论以下广义积分的收敛性

$$\int_0^{\infty} (-1)^{[x]} dx,$$

其中 $[\]$ 为取整符号.

草稿区

得分

六、(15分) 设 G 为 \mathbb{R}^2 上有界闭区域, ∂G 有有线条分段光滑的简单闭曲线构成. 假设 $u \in C^2(G)$, 且 u 在边界上恒为零. 证明对任意 $\lambda > 0$,

$$\lambda \int_G u^2 dx dy + \frac{1}{\lambda} \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \geq \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy.$$