2023-2024 信息论期末测试卷

出题人：光炫

1. 给定联合概率分布 $p(x,y)$，如下所示：

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

（1）计算 $H(X), H(Y), H(X|Y)$ 和 $I(X;Y)$。

（2）计算 $D(p_x \parallel p_y)$ 和 $D(p_y \parallel p_x)$。

（3）为（1）中的量绘制 Venn 图。

2. 记概率分布 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_{\mathrm{n}})$，并令 $p=\max\limits_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}} p_i$。证明：

（1）$H(\mathbf{p}) \geq -p\log p-(1-p)\log(1-p)$。

（2）$H(\mathbf{p}) \geq -\log p$。

（3）$H(\mathbf{p}) \geq 2(1-p)$。

3. 考虑一个随机变量 X，它取六个值 $\{A,B,C,D,E,F\}$，对应的概率分别为 0.3,0.25,0.2,0.1,0.1,0.05。

（1）为该随机变量构建一个二进制哈夫曼码，并求其平均码长。

（2）为该随机变量构建一个四进制哈夫曼码［即，使用四个符号（称为 a,b,c 和 d）的字母表上的编码］，并求其平均码长。

（3）通过从（2）中的四进制哈夫曼码开始，并使用映射 $a\to 00, b\to 01, c\to 10, d\to 11$ 将符号转换为二进制，为该随机变量构建一个二进制码，并计算其平均长度。

(4) 对任意的随机变量Y，记L_H为Y的二进制 Huffman 编码的平均长度，L_{QB}为从Y的四进制 Huffman 编码用(3)中方法转化成的二进制编码的平均长度。证明 $L_H \le L_{QB} \le L_H+1$.

4. （Han 不等式）对于 $\mathcal{N}_\alpha=\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集 α，用 X_α 表示 $(X_i, i\in\alpha)$。

对于 $1 \le k \le n$，令

$$H_k = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{H(X_\alpha)}{k}.$$

证明 $H_1 \ge H_2 \ge \dots \ge H_n$。

注：考试中只需处理 $n = 4$ 的情况。

5.　如果一个码既是前缀码又是后缀码，则称其为无缀码。设 $l_1, l_2, \dots, l_m$ 是 m 个正整数。证明：如果

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{-l_k} \le \frac{1}{2},$$

则存在一个码字长度分别为 $l_1, l_2, \dots, l_m$ 的二进制无缀码。

6.　(1) 某信道具有如下概率转移矩阵：

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

计算其信道容量。

(2) 一个具有输出字母表 $\mathcal{Y}$ 和概率转移矩阵 $p(y|x)$ 的信道被称为 II 型弱对称信道，如果存在一个划分 $\mathcal{Y} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_i$，使得对于 $1 \le i \le n$，对应于 $\mathcal{Y}_i$ 的 $p(y|x)$ 部分满足：其行向量彼此是排列，且其列向量彼此也是排列。推导 II 型弱对称信道的容量公式。

7.　Z 信道具有二进制输入和输出字母表，其概率转移矩阵如下：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \{0,1\}$$

求 Z 信道的信道容量以及达到容量时的输入概率分布。