

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第一学期“数学分析I”月考3试卷

一、(15分) 求不定积分 $\int \frac{x^5 - x^3}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

二、(15分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) + e^{-x} - 1}{x^4}$.

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导且在 (a, b) 内只有唯一的驻点 x_0 , $f(x_0)$ 为极小值. 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, 都有 $f(x) > f(x_0)$.

四、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 两次可导, 且对任意 $x \in [0, 2]$, 有 $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 2$. 证明: $|f'(1)| \leq 2$.

五、(15分) 求不定积分 $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

六、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明: 存在实数 ξ , 使得

$$f(\xi)f'(\xi) = \xi.$$

七、(10分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续、递增且下凸, 都在 (a, b) 连续可导. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = f'(\xi)g'(\xi).$$