

草稿区

专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、(每问10分，共30分) 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2y^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

- (1) 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续? 证明你的结论.
- (2) 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微? 证明你的结论.
- (3) 设 $\vec{l}=(1,2)$, 求方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.

得 分

二、(10分) 求不定积分 $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$.

得 分

三、(12分) 设 x 为由方程 $x^2y + e^{2x} + z = 0$ 在 $(0, 1, -1)$ 的一个邻域内确定的 y, z 的隐函数，求 $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ 在 $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ 处的值.

得 分

四、(12分) 求函数 $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ 在有界闭区域 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ 上的最大值与最小值.

得 分

五、(10分) 设 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{25} \right\}$, 求有界闭区域 D 的面积.

得分

六、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 对任意实数 x , 都有 $\int_0^x f(t)dt = xf(x)$. 证明: $f(x)$ 是常数函数.

得分

七、(10分) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x \sin(\sin(2\pi nx))dx = 0$.

得 分

八、(6分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的上凸函数, $f(0) = 1$. 证明:

$$\frac{1}{3} \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x - \frac{1}{2} \int_0^1 x f(x) \mathrm{d} x \geqslant \frac{1}{12}.$$