

20级数学分析I第2次月考试题

一、(本题30分) 用现有知识计算下列极限.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x + 2020) - \arctan 2020}{x}.$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \quad \left(a \text{ 不是 } \frac{\pi}{2} \text{ 的整数倍} \right).$

二、(本题15分) 求由上半椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 给出的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

三、(本题15分) 求函数 $f(x) = \arcsin x$ 在点0的各阶导数.

四、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < +\infty.$$

证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 至少存在最大值、最小值中的一个.

五、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$. 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

六、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f'_+(a)$ 存在, 且 $f'_+(a) > \lambda > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\lambda = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$.