

南开大学本科生2021 - 2022学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(B卷)

草稿区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得分

一、(15分) 试作开圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 与闭圆盘 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 之间的双射.

得分

二、(10分) 求证 \mathbb{R} 中可测集全体有基数 2^c .

得分

三、(15分) 设 A, B 是 \mathbb{R} 中的测度有限的集合, 证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \Delta B).$$

得分

四、(15分) 设 $m(E) < \infty$, $\{f_k\}_{k \geq 1}$ 在 E 上测度收敛于 f , $\{g_k\}_{k \geq 1}$ 在 E 上测度收敛于 g , 当 $k \rightarrow \infty$. 证明: $\{f_k g_k\}_{k \geq 1}$ 在 E 上测度收敛于 fg , 当 $k \rightarrow \infty$.

得分

五、(10分) 设 $f \in L^1(E)$, E_k 是 E 中的可测子集且 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(E) < \infty$. 试证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f dx = \int_E f dx.$$

得分

六、(10分) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$.

得分

七、(15分) 设 f 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数且 $f(x) \geq c > 0$ 在 $[a, b]$ 上处处成立. 证明: $\frac{1}{f}$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

得分

八、(10分) 设 f 是 $(0, 1)$ 上的可积函数. 问极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} \frac{1}{1 + e^{nf(x)}} dx$ 是否存在? 如果存在, 求出其值.