20级数学分析II第3次月考试题

一、(本题15分) 写出函数$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$在$(0,0)$点邻近的二阶泰勒展开式.

二、(本题30分) 求下列方向导数和偏导数.

1. 设$f(x,y)=\ln(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y)$, $\overrightarrow{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中$\theta\in[0,2\pi)$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{l}}(0,0)$.
2. 设z为由方程$z^3-xz-y=0$确定的x, y的隐函数，求z''_{xy}.

三、(本题15分) 在曲线$x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\mathrm{e}^t$上求一点，使得该曲线在此点的切线平行于平面$\sqrt{3}x+y-4=0$.

四、(本题15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$下的极值.

五、(本题15分) 设n元函数$f(X)$在$X_0\in\mathbb{R}^n$的一个邻域内所有二阶偏导数都连续, 且$\nabla f(X_0)=0$, $f(X)$在X_0的黑塞矩阵$H_f(X_0)$为正定矩阵. 证明：存在$\delta>0$和$\lambda>0$, 使得当$\Delta X\in\mathbb{R}^n$且$0<|\Delta X|<\delta$时，就有$f(X_0+\Delta X)-f(X_0)>\lambda|\Delta X|^2$.

六、(本题10分) 设D是$\mathbb{R}^n$中的凸开区域，$F:D\to\mathbb{R}^n$是可微映射，对任意$X\in D$, 雅可比矩阵$J_F(X)$都是正定矩阵，证明：F是单射.