数理科学与大数据本科生2021-2022学年第一学期“数学分析I”期末考试试卷（A卷）参考解答

一、(15分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}\\
=&\frac{1+1}{1}\\
=&2.
\end{aligned}$$

□

另解 由泰勒公式，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{6}(-x)^3+o(x^3)\right)-2x}{x-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{6}+o(1)}\\
=&\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}\\
=&2.
\end{aligned}$$

□

二、(15分) 求不定积分$\int \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 由换元积分法和分部积分法，有

$$
\begin{aligned}
& \int \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
= & \int t\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}(t^2) \quad (x=t^2, \text{其中} t \geqslant 0) \\
= & 2\int t^2\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \\
= & 2\int t^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{t}\right) \\
= & 2t^2\mathrm{e}^{t} - 2\int \mathrm{e}^{t}\cdot 2t\mathrm{d}t \\
= & 2t^2\mathrm{e}^{t} - 4\int t\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \\
= & 2t^2\mathrm{e}^{t} - 4\int t\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{t}\right) \\
= & 2t^2\mathrm{e}^{t} - 4t\mathrm{e}^{t} + 4\int \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \\
= & 2t^2\mathrm{e}^{t} - 4t\mathrm{e}^{t} + 4\mathrm{e}^{t} + C \\
= & 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + 4\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C,
\end{aligned}
$$

其中C是任意常数. □

三、(15分) 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的连续函数，且$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与$g(x)$在$[a,b]$上的最大值相等. 证明：存在$\xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi)=g(\xi)$.

证 由最值定理知存在$x_1 \in [a,b]$, 使得x_1是$f(x)$在$[a,b]$上的一个最大值点, 存在$x_2 \in [a,b]$, 使得x_2是$g(x)$在$[a,b]$上的一个最大值点. 令$\varphi(x)=f(x)-g(x)$, $x \in [a,b]$, 则$\varphi(x)$在$[a,b]$连续. 因为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与$g(x)$ 在$[a,b]$上的最大值相等，所以$\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1) \geqslant 0$, $\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2) \leqslant 0$. 分两种情形讨论.

(i) $\varphi(x_1)\varphi(x_2)=0$的情形.

这时，$\varphi(x_1)=0$或$\varphi(x_2)=0$. 不妨设$\varphi(x_1)=0$, 取$\xi=x_1$, 就有$f(\xi)=g(\xi)$.

(ii) $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\neq 0$的情形.

这时，$\varphi(x_1)>0$, $\varphi(x_2)<0$. 由根的存在定理知存在介于x_1, x_2之间的ξ, 使得$\varphi(\xi)=0$, 从而$f(\xi)=g(\xi)$. □

四、(共15分，其中第1问10分，第2问5分)

(1) 证明：对任意$x>0$, 存在唯一的$\theta(x)\in(0,1)$满足$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$.

(2) 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

(1) **证** 令$f(x)=\sqrt{x}$, 则$f(x)$在$(0,+\infty)$可导. 由拉格朗日中值定理知对任意$x>0$, 存在$\theta(x)\in(0,1)$满足$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta(x))$, 即

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}.$$

因为$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,+\infty)$上严格递减，所以满足上式的$\theta(x)$是唯一的. 由上式可以解得

$$\theta(x)=\frac{1}{4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}-x=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{4}-x=\frac{1}{4}\left[1-2x+2\sqrt{x(x+1)}\right].$$

(2) **解**

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\theta(x)\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-2x+2\sqrt{x(x+1)}\right]\\
=\ &\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x(x+1)}-x\right]\\
=\ &\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x}\\
=\ &\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\\
=\ &\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\\
=\ &\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

五、(15分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上无界. 证明：存在$x_0\in[a,b]$, 使得对任意$\delta>0$, $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$上无界.

证法一 反证. 若不然，则对任意$x\in[a,b]$, 存在$\delta_x>0$, 使得$f(x)$在$(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap[a,b]$上有界. 令

$$\mathfrak{I}=\left\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\,\Big|x\in[a,b]\right\},$$

则$\mathfrak{I}$是$[a,b]$的一个开覆盖, 从而由有限覆盖定理知其中必有有限子覆盖

$$\mathfrak{I}_1=\left\{(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})\,\Big|k=1,\cdots,K\right\}.$$

因为$f(x)$在$(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})\cap[a,b]$上有界, 所以存在常数$M_k>0$, 使得$|f(x)|\leqslant M_k$, $\forall x\in(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})\cap[a,b]$, $k=1,2,\cdots,K$. 令$M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_K\}>0$, 则对任意$x\in[a,b]$, 由$\mathfrak{I}_1$是子覆盖知存在$k\in\{1,2,\cdots,K\}$, 使得$x\in(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})\cap[a,b]$, 于是$|f(x)|\leqslant M_k\leqslant M$. 这与“函数$f(x)$在$[a,b]$上无界”矛盾. □

证法二 因为函数$f(x)$在$[a,b]$上无界，所以对任意$M>0$, 存在$x_M\in[a,b]$, 使得$|f(x_M)|>M$. 依次取$M=1,2,3,\cdots$, 将相应的x_M记为x_1, x_2, x_3, $\cdots$, 就得到数列$\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 满足$|f(x_n)|>n$. 由致密性定理知$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 设$x_0=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$, 则$x_0\in[a,b]$. 由$x_0=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$知对任意$\delta>0$, 存在正整数$K$, 当$k>K$时，有$|x_{n_k}-x_0|<\delta$. 于是当$k>K$时，有$x_{n_k}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$. 对任意$M>0$, 取$k=\max\{K+1,[M]+1\}$, 则$x_{n_k}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$且$|f(x_{n_k})|>n_k\geqslant k>M$, 故$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$上无界. □

证法三 令$a_1=a$, $b_1=b$, 把$[a_1,b_1]$等分为两个小的闭区间$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$, 则$f(x)$至少在这两个小区间中的一个上无界. 将$f(x)$在其上无界的一个小区间取为$[a_2,b_2]$. 再将$[a_2,b_2]$等分为两个小的闭区间$\left[a_2,\dfrac{a_2+b_2}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_2+b_2}{2},b_2\right]$, 将$f(x)$在其上无界的一个小区间

取为$[a_3,b_3]$. 重复以上过程, 一直做下去，得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$, 满足:

(i) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$;

(iii) 对任意n, $f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界.

根据区间套定理, 存在$x_0\in[a,b]$, 使得对任意正整数n, 有$a_n\leqslant x_0\leqslant b_n$, 并且$x_0=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 由$x_0=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$知对任意$\delta>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$|a_n-x_0|<\delta$且$|b_n-x_0|<\delta$. 于是当$n>N$时，有$[a_n,b_n]\subseteq(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$. 因此，由$f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界知$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$上无界. □

六、(15分) 设实数$\alpha < 1$. 证明：函数$f(x) = x^\alpha \ln x$在$[1, +\infty)$上一致连续.

证 对$f(x)$求导，得

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \frac{\alpha \ln x + 1}{x^{1-\alpha}}.$$

由洛必达法则得

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha \ln x + 1}{x^{1-\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\alpha}{x}}{(1-\alpha)x^{-\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha}{(1-\alpha)x^{1-\alpha}} = 0.$$

由函数极限的定义知，对$\varepsilon = 1$, 存在$X > 1$, 当$x > X$时，有$|f'(x) - 0| < \varepsilon$, 故当$x > X$时，有$|f'(x)| < 1$. 由初等函数的连续性知$f'(x)$在$[1, +\infty)$上连续，故由闭区间上连续函数的有界定理知$f'(x)$在$[1, X]$上有界. 设对任意$x \in [1, X]$, 都有$|f'(x)| \leqslant M'$, 令$M = \max\{M', 1\}$, 则对任意$x \in [1, +\infty)$, 都有$|f'(x)| \leqslant M$, 即$f'(x)$在$[1, +\infty)$上有界. 由教材6.5节例题的结论知“若函数$f(x)$在区间$I$可导且导数$f'(x)$在区间$I$有界, 则$f(x)$在区间$I$一致连续”，故函数$f(x) = x^\alpha \ln x$在$[1, +\infty)$上一致连续.

□

七、(10分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f(a)f(b)>0$, $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 证明：存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

证 由$f(a)f(b)>0$知$f(a)$与$f(b)$同号, 由$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$知$f(a)$与$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$异号，由此知$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$f(b)$异号，即$f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$. 因为函数$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, 所以由介值定理知存在$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, 使得$f(\xi_1)=0$; 因为函数$f(x)$在$[a,b]$连续，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$, 所以由介值定理知存在$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, 使得$f(\xi_2)=0$. 令

$$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x),\quad x\in[a,b],$$

则由$f(x)$在(a,b)可导知$g(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$可导，由$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$得$g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$. 因此，根据罗尔定理知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$, 使得$g'(\xi)=0$, 即$\mathrm{e}^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0$. 因为$\mathrm{e}^{-\xi}\neq0$, 所以$f'(\xi)-f(\xi)=0$, 从而$f'(\xi)=f(\xi)$. □