数理科学与大数据本科生2021 — 2022学年第一学期“数学分析I”月考3试卷

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六	七

得 分

一、(15分) 求不定积分$\displaystyle\int \frac{x^5-x^3}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^5-x^3}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(x-\frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\int\frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x\\ =\ &\frac{1}{2}x^2-\int\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^4+x^2+1)}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+C.\end{aligned}$$

另解

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^5-x^3}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^4-x^2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t\quad(t=x^2)\\ =\ &\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)}{t^2+t+1}\\ =\ &\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+C==\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+C.\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

二、(15分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)+\mathrm{e}^{-x}-1}{x^4}$.

解 由$\ln(1+x)$和$\sin x$的麦克劳林公式得到

$$\begin{aligned}
&\ln(1+\sin x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}\sin^4 x+o(\sin^4 x)\\
=&\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\
=&\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4\right)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\\
=&\ x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\quad (x\to 0).
\end{aligned}$$

由e^x的麦克劳林公式得到

$$\mathrm{e}^{-x}=1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{6}(-x)^3+\frac{1}{24}(-x)^4+o(x^4)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\quad (x\to 0).$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)+\mathrm{e}^{-x}-1}{x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\right)+\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-1}{x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}\\
=&-\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设函数$f(x)$在(a,b)可导且在(a,b)内只有唯一的驻点x_0, $f(x_0)$为极小值. 证明：对任意$x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, 都有$f(x) > f(x_0)$.

证 因为函数$f(x)$在(a,b)可导且在(a,b)内只有唯一的驻点x_0, 所以$f(x)$在(a,x_0)上恒不为0. 根据达布定理，$f(x)$在(a,x_0)上恒大于0或恒小于0. 若$f(x)$在(a,x_0)上恒大于0, 则$f(x)$在$(a,x_0]$上严格递增，于是当$x \in (a,x_0)$时, 有$f(x) < f(x_0)$, 与$f(x_0)$为极小值矛盾！因此，$f(x)$在(a,x_0)上恒小于0. 于是$f(x)$在$(a,x_0]$上严格递减，故对任意$x \in (a,x_0)$, 有$f(x) > f(x_0)$.

同理可证$f(x)$在(x_0,b)上恒大于0. 于是$f(x)$在$[x_0,b)$上严格递增，故对任意$x \in (x_0,b)$, 有$f(x) > f(x_0)$.

综合以上讨论，对任意$x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, 都有$f(x) > f(x_0)$.

草 稿 区

得 分

四、(15分) 设函数$f(x)$在$[0,2]$两次可导，且对任意$x\in[0,2]$，有$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 2$. 证明：$|f'(1)|\leqslant 2$.

证 由带拉格朗日余项的泰勒公式知，当$x\in[0,2]$时，有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2,\quad \text{其中}\xi\text{介于}x\text{与}1\text{之间}.$$

特别地，

$$\begin{aligned} f(0)&=f(1)+f'(1)\cdot(-1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(-1)^2,\quad \xi_1\in(0,1),\\ f(2)&=f(1)+f'(1)\cdot 1+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot 1^2,\quad \xi_2\in(1,2). \end{aligned}$$

后式减去前式，得

$$f(2)-f(0)=2f'(1)+\frac{f''(\xi_2)-f''(\xi_1)}{2},$$

从而

$$f'(1)=\frac{f(2)-f(0)}{2}+\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{4}.$$

因为对任意$x\in[0,2]$，有$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 2$, 所以

$$\begin{aligned} |f'(1)| &= \left|\frac{f(2)-f(0)}{2}+\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{4}\right|\\ &\leqslant \frac{|f(2)|+|f(0)|}{2}+\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{4}\\ &\leqslant \frac{1+1}{2}+\frac{2+2}{4}\\ &= 2. \end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

五、(15分) 求不定积分$\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 由凑微分法得

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

于是由分部积分法得

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(-\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2}\ln x - \int (-\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\ln x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x.$$

被积函数$\dfrac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是$(0,1)$, 令$x=\cos t$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则$\mathrm{d}x=-\sin t\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-x^2}=\sin t$. 从而有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot(-\sin t\mathrm{d}t) = \int \frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}t\\
=\ &\int \cos t\mathrm{d}t - \int \sec t\mathrm{d}t = \sin t - \ln|\sec t+\tan t| + C = \sqrt{1-x^2} - \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C\\
=\ &\sqrt{1-x^2}+\ln x-\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C.
\end{aligned}$$

因此,

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\ln x + \sqrt{1-x^2} + \ln x - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C.$$

草 稿 区

得 分

六、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明：存在实数$\xi$, 使得

$$f(\xi)f'(\xi)=\xi.$$

证 令$g(x)=f^2(x)-x^2$, 则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，且

$$g'(x)=2[f(x)f'(x)-x].$$

由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$得

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-1\right]=-\infty.$$

令$\lambda=g(0)-1$, 由负无穷大量的定义知，存在$X>0$, 当$|x|\geqslant X$时，有$g(x)<\lambda$. 因为$g(0)>\lambda$, $g(-X)<\lambda$, 所以由连续函数的介值定理知存在$\xi_1\in(-X,0)$, 使得$g(\xi_1)=\lambda$. 因为$g(0)>\lambda$, $g(X)<\lambda$, 所以由连续函数的介值定理知存在$\xi_2\in(0,X)$, 使得$g(\xi_2)=\lambda$. 因为$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$\xi_1<\xi_2$, $g(\xi_1)=g(\xi_2)$, 所以由罗尔定理知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得$g'(\xi)=0$. 又$g'(x)=2[f(x)f'(x)-x]$, 故$f(\xi)f'(\xi)-\xi=0$, 从而

$$f(\xi)f'(\xi)=\xi.$$

草 稿 区

得 分

七、(10分) 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$连续、递增且下凸，都在(a,b)连续可导. 证明：存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = f'(\xi)g'(\xi).$$

证 因为函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，所以由拉格朗日中值定理知，存在$\xi_1 \in (a,b)$和$\xi_2 \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad g'(\xi_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

若$\xi_1 = \xi_2$, 则取$\xi = \xi_1 = \xi_2$, 就有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = f'(\xi_1)g'(\xi_2) = f'(\xi)g'(\xi).$$

因此，下面设$\xi_1 \neq \xi_2$. 不妨设$\xi_1 < \xi_2$ ($\xi_1 > \xi_2$情形的证明是类似的). 令

$$\varphi(x) = f'(x)g'(x), \quad x \in (a,b),$$

则由$f(x)$和$g(x)$都在(a,b)连续可导知$\varphi(x)$在(a,b)连续. 因为$f(x)$和$g(x)$都在(a,b)可导、递增，所以$f'(x)$和$g'(x)$都在(a,b)非负. 因为$f(x)$和$g(x)$都在(a,b)可导、下凸，所以$f'(x)$和$g'(x)$都在(a,b)单调递增. 于是

$$0 \leqslant f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2), \quad 0 \leqslant g'(\xi_1) \leqslant g'(\xi_2).$$

由此可知

$$\varphi(\xi_1) = f'(\xi_1)g'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_1)g'(\xi_2),$$
$$\varphi(\xi_2) = f'(\xi_2)g'(\xi_2) \geqslant f'(\xi_1)g'(\xi_2).$$

根据连续函数的介值定理知存在$\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, 使得$\varphi(\xi) = f'(\xi_1)g'(\xi_2)$, 即$f'(\xi)g'(\xi) = f'(\xi_1)g'(\xi_2)$. 因此，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = f'(\xi_1)g'(\xi_2) = f'(\xi)g'(\xi).$$