

20级数学分析I第3次月考试题

一、(本题15分) 求函数 $f(x) = x^2 - 4x \sin x - 4 \cos x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中的极大值点与极小值点.

二、(本题30分) 求下列各不定积分.

1. $\int e^x \sin x \cos x dx.$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{e^{2x^2} - 1}} dx.$

三、(本题15分) 设 n 是正整数, a_1, a_2, \dots, a_n 都是正实数. 记 $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, 证明:

$$a^{na} \leq \prod_{i=1}^n a_i^{a_i}.$$

四、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上三次可导, $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

五、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$. 证明: $f'(x)$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$.

六、(本题10分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2n^2 \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) - en \right]$.