数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第一学期“数学分析3-1”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(本题共50分，每小题10分) 按要求解答下列各题.

(1) 求由方程$y = 1 + xe^y$确定的隐函数$y = y(x)$的二阶导数.

(2) 设$y = \dfrac{x}{4x^2 - 1}$, 求$y^{(n)}$.

草 稿 区

(3) 设$a > 0$, 函数$f(x)$在点a处可导，$f(a) > 0$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln a}}$.

(4) 求函数$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{\cos x}$的最大值.

草 稿 区

(5) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

得 分

二、(10分) 设函数$f(x)$在(a,b)中可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$. 证明：存在数列$\{x_n\}\subseteq(a,b)$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=-\infty$.

草 稿 区

得 分

三、(10分) 设函数$f(x)$在区间I上连续，对任意$x_0 \in (\inf I, \sup I)$和任意$\delta > 0$, 存在$x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$, 使得$f(x) \geqslant f(x_0)$. 证明：函数$f(x)$在区间$I$上单调递增.

得 分

四、(10分) 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的函数，常数$\alpha > 1$, 对任意实数x和y, 都有

$$|f(x+y) - f(x-y) - (x+1)y| \leqslant |y|^\alpha,$$

求所有满足上述要求的函数$f(x)$.

草 稿 区

得 分

五、(本题共15分，第1问10分，第2问5分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$中两次可导，$f(0)=0$.

(1) 证明：方程$f'(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}f(x)=0$在$(-1,1)$中至少有两个不同的实根；

(2) 证明：存在$\xi\in(-1,1)$, 使得$f''(\xi)=\dfrac{6\xi^2+2}{(\xi^2-1)^2}f(\xi)$.

草 稿 区

得 分

六、(5分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，在(a,b)中两次可导，$f(a)=f(b)=0$, 对任意$x\in(a,b)$, 有$f(x)+f''(x)\geqslant 0$, 且存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)>0$. 证明：$b-a\geqslant\pi$.