数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第一学期“数学分析3-1”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业:　　　　年级:　　　　学号:　　　　姓名:　　　　成绩:

得 分

一、(本题共50分，每小题10分) 按要求解答下列各题.

(1) 求由方程$y=1+x\mathrm{e}^y$确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数.

解　等式$y=1+x\mathrm{e}^y$两边对x求导，得$y'=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y y'$, 解得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}=\frac{\mathrm{e}^y}{2-y}.$$

上式两边对x求导，得

$$y''=\frac{\mathrm{e}^y y'\cdot(2-y)-\mathrm{e}^y\cdot(-y')}{(2-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^{2y}+\frac{\mathrm{e}^{2y}}{2-y}}{(2-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

(2) 设$y=\dfrac{x}{4x^2-1}$, 求$y^{(n)}$.

解　由$y=\dfrac{x}{4x^2-1}$得$y=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x-1}\right)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$, 故有

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{(-1)^n n!}{\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}\right]\\
&= (-1)^n n!\cdot 2^{n-2}\cdot\left[\frac{1}{(2x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(2x-1)^{n+1}}\right].
\end{aligned}$$

草 稿 区

(3) 设$a>0$, 函数$f(x)$在点a处可导，$f(a)>0$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln a}}$.

解　先求函数极限$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$. 因为

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]}{\ln x-\ln a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\ln f(x)-\ln f(a)}{x-a}}{\frac{\ln x-\ln a}{x-a}}=\frac{[\ln f(x)]'\big|_{x=a}}{[\ln x]'\big|_{x=a}}=\frac{\frac{f'(a)}{f(a)}}{\frac{1}{a}}=\frac{af'(a)}{f(a)},$$

所以

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}=\mathrm{e}^{\frac{af'(a)}{f(a)}}.$$

再令$x_n=a+\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 由海涅定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln a}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x_n)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x_n-\ln a}}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}=\mathrm{e}^{\frac{af'(a)}{f(a)}}.$$

(4) 求函数$f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x}$的最大值.

解　因为$f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x}$是周期为$2\pi$的周期函数，所以$f(x)$在$[0,2\pi]$上的最大值就是$f(x)$的最大值. 注意到$\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x}\leqslant\mathrm{e}^{|\sin x|}+\mathrm{e}^{|\cos x|}$, 可知$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值就是$f(x)$在$[0,2\pi]$上的最大值. 对$f(x)$求导，得$f'(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x+\mathrm{e}^{\cos x}\cdot(-\sin x)$. 当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，就有

$$f'(x)=\sin x\cos x\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x}-\frac{\mathrm{e}^{\cos x}}{\cos x}\right).$$

令$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, 则当$x\in(0,1)$时，$g'(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}<0$. 于是$g(x)$在$(0,1)$中严格递减. 因此，在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$中$f'(x)=\sin x\cos x\cdot[g(\sin x)-g(\cos x)]>0$, 在$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$中$f'(x)<0$, 从而$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上严格递增，在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上严格递减. 由此可见$f(x)$在$\dfrac{\pi}{4}$处取得最大值$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

草 稿 区

(5) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解　当$x\to 0$时，有$\tan x-\sin x=\tan x\cdot(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2}$, $\tan(\tan x)-\sin(\tan x)\sim\dfrac{\tan^3 x}{2}\sim\dfrac{x^3}{2}$, $\sin(\tan x)-\sin(\sin x)=2\cos\dfrac{\tan x+\sin x}{2}\sin\dfrac{\tan x-\sin x}{2}\sim 2\cdot 1\cdot\dfrac{\tan x-\sin x}{2}\sim\dfrac{x^3}{2}$. 因此，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\tan x)}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}}=1+1=2.\end{aligned}$$

另解　记$f(x)=\tan x$, 则$f'(x)=\sec^2 x$, $f''(x)=2\sec^2 x\tan x$, $f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$, 从而$f(0)=f''(0)=0$, $f'(0)=1$, $f'''(0)=2$. 因此，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$. 进而得$\tan(\tan x)=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x+o(\tan^3 x)=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)^3+o(x^3)=x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$. 类似地，由$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$得$\sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)=x-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{6}\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)^3+o(x^3)=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=2.$$

得 分

二、(10分) 设函数$f(x)$在(a,b)中可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$. 证明：存在数列$\{x_n\}\subseteq(a,b)$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=-\infty$.

证　取$b_n=a+\dfrac{b-a}{n+1}\in(a,b)$, $n=1,2,\cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. 因为$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$, 所以存在$\delta_n\in\left(0,\dfrac{b-a}{n+1}\right)$, 使得当$a<x\leqslant a+\delta_n$ 时，有$f(x)>f(b_n)+1$. 令$a_n=a+\delta_n$, $n=1,2,\cdots$, 则由拉格朗日中值定理知存在$x_n\in(a_n,b_n)$, 使得$f'(x_n)=\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$. 由$a<x_n<b_n$, 根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 因为

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}<\frac{-1}{\frac{b-a}{n+1}}=-\frac{n+1}{b-a},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=-\infty$.

草 稿 区

得 分

三、(10分) 设函数$f(x)$在区间I上连续，对任意$x_0 \in (\inf I, \sup I)$和任意$\delta > 0$, 存在$x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$, 使得$f(x) \geqslant f(x_0)$. 证明：函数$f(x)$在区间$I$上单调递增.

证　先证明函数$f(x)$在区间$(\inf I, \sup I)$上单调递增. 任取$(\inf I, \sup I)$且$x_1 < x_2$, 令$S = \{x \in [x_1, x_2] | f(x_1) \leqslant f(x)\}$, 则$x_2$是$S$的一个上界. 由$x_1 \in S$知$S$非空，故由确界原理知$S$有上确界，记$c = \sup S$, 则$c \in [x_1, x_2]$且有数列$\{t_n\} \subseteq S$使得$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$. 若$c < x_2$, 则由$f(x_1) \leqslant f(t_n)$得$f(x_1) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = f(c)$. 由题设知存在$d \in (c, x_2)$使得$f(c) \leqslant f(d)$, 从而$f(x_1) \leqslant f(d)$, 故$d \in S$, 与$c$是$S$的上确界矛盾！因此$c = x_2$, 由上面的证明过程可见$f(x_1) \leqslant f(c) = f(x_2)$. 按定义知函数$f(x)$在区间$(\inf I, \sup I)$上单调递增.

再证明函数$f(x)$在区间I上单调递增. 若区间I没有端点，则$I = (\inf I, \sup I)$, 由上面的证明即知函数$f(x)$在区间I上单调递增. 若区间I有端点，不妨设a是区间I的左端点（区间I有右端点的情形可类似地证明），由于上面已经证明了函数$f(x)$在区间$(\inf I, \sup I)$上单调递增，只需再验证$f(a) \leqslant f(x)$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$. 对任意$x \in I$, $x > a$和任意$t \in (a, x)$, 有$f(t) \leqslant f(x)$, 于是$f(a) = \lim\limits_{t\to a^+} f(t) \leqslant f(x)$. 这就完成了证明.

得 分

四、(10分) 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的函数，常数$\alpha > 1$, 对任意实数x和y, 都有

$$|f(x+y) - f(x-y) - (x+1)y| \leqslant |y|^\alpha,$$

求所有满足上述要求的函数$f(x)$.

解　令$u = x + y$, $v = x - y$, 则由$|f(x+y) - f(x-y) - (x+1)y| \leqslant |y|^\alpha$得

$$\left| f(u) - f(v) - \left(\frac{u+v}{2} + 1\right) \cdot \frac{u-v}{2} \right| \leqslant \frac{|u-v|^\alpha}{2^\alpha},\ \forall u, v \in \mathbb{R},$$

令$g(x) = f(x) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$, 则上式就化为

$$|g(u) - g(v)| \leqslant \frac{|u-v|^\alpha}{2^\alpha},\ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

于是

$$0 \leqslant \left| \frac{g(u) - g(v)}{u - v} \right| \leqslant \frac{|u-v|^{\alpha-1}}{2^\alpha},\ \forall u, v \in \mathbb{R},\ u \neq v.$$

令$u \to v$, 根据两边夹定理得$\lim\limits_{u\to v} \left| \dfrac{g(u) - g(v)}{u - v} \right| = 0$, 从而$\lim\limits_{u\to v} \dfrac{g(u) - g(v)}{u - v} = 0$, 即$g'(v) = 0$. 因此$g'(x) \equiv 0$, 由拉格朗日中值定理的推论知$g(x) \equiv C$, 其中$C$是任意常数. 故$f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + C$, 其中$C$是任意常数.

草 稿 区

得 分

五、(本题共15分，第1问10分，第2问5分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$中两次可导，$f(0)=0$.

(1) 证明：方程$f'(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}f(x)=0$在$(-1,1)$中至少有两个不同的实根；

(2) 证明：存在$\xi\in(-1,1)$, 使得$f''(\xi)=\dfrac{6\xi^2+2}{(\xi^2-1)^2}f(\xi)$.

证 (1) 令$g(x)=(x^2-1)f(x)$, 则$g(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$中可导. 因为$g(-1)=g(0)=g(1)=0$, 所以由罗尔定理知存在$\xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$, 使得$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 又

$$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)=(x^2-1)\left[f'(x)+\frac{2x}{x^2-1}f(x)\right],\ \forall x\in(-,1),$$

故ξ_1和ξ_2都是方程$f'(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}f(x)=0$的根. 因此，方程$f'(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}f(x)=0$在$(-1,1)$中至少有两个不同的实根.

(2) 令$h(x)=\dfrac{g(x)}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^2-1}f'(x)+\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}f(x)$, $x\in(-1,1)$, 则$h(x)$在$(-1,1)$中可导. 由(1)知$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$, 故根据罗尔定理知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-1,1)$, 使得$h'(\xi)=0$. 当$x\in(-1,1)$时，有

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{x^2-1}f''(x)-\frac{2x}{(x^2-1)^2}f'(x)+\frac{2x}{(x^2-1)^2}f'(x)+\frac{2(x^2-1)^2-2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}f(x)\\
&= \frac{1}{x^2-1}f''(x)-\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}f(x)\\
&= \frac{1}{x^2-1}\cdot\left[f''(x)-\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^2}f(x)\right],
\end{aligned}$$

故$f''(\xi)=\dfrac{6\xi^2+2}{(\xi^2-1)^2}f(\xi)$.

草 稿 区

得 分

六、(5分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，在(a,b)中两次可导，$f(a)=f(b)=0$, 对任意$x\in(a,b)$, 有$f(x)+f''(x)\geqslant 0$, 且存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)>0$. 证明：$b-a\geqslant\pi$.

证　反证. 若不然，则$b-a<\pi$. 不妨设$a=0$ ($a\neq 0$时用$f(x+a)$代替$f(x)$进行讨论)，于是$b\in(0,\pi)$. 令$g(x)=f'(x)\sin x-f(x)\cos x$, 则$g(x)$在$[0,b]$上连续，在$(0,b)$中可导. 因为

$$g'(x)=[f(x)+f''(x)]\sin x\geqslant 0,\ \forall x\in(0,b),$$

所以$g(x)$在$[0,b]$上递增. 又$g(0)=0$, 故$g(x)$在$[0,b]$上非负. 令$h(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$, $x\in(0,b]$, 则$h(x)$在$(0,b]$上可导. 因为

$$h'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{g(x)}{\sin^2 x}\geqslant 0,\ \forall x\in(0,b],$$

所以$h(x)$在$(0,b]$上递增. 又$h(b)=0$, 故$h(x)$在$(0,b]$上非正. 因此$f(x)\leqslant 0$, $\forall x\in(0,b)$, 与$f(x_0)>0$矛盾！