20级数学分析II第2次月考试题

一、(本题15分) 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数. 用“紧性”证明$f(X)$在D上有界.

二、(本题30分) 判断下列极限是否存在, 如果存在并求其值.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.
2. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$.

三、(本题15分) 设$f(x,y)$在圆周$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2=r^2\right\}$上连续. 证明：存在以$(x_1,y_1)$, (x_2,y_2)为端点的L的直径且$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$.

四、(本题15分) 设$f(x,y)$在(x_0,y_0)的一个邻域内所有偏导数存在且其中一个偏导数在(x_0,y_0)连续. 证明：$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微.

五、(本题15分) 设$z=f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$可微，存在$a\neq 0$, $b\neq 0$使得$b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 证明：存在$g(t)$使得$z=g(ax+by)$.

六、(本题10分) 设$f(x,y)$定义在$\mathbb{R}^2$上，分别对x与y一元连续，且$f(x,y)$把紧集映为紧集. 证明：$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上作为二元函数连续.