数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第一学期“数学分析”期中考试试卷

草 稿 区

专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、(共16分，其中第(1)问和第(2)问各4分，第(3)问8分)

(1) 写出 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的$\varepsilon-\delta$定义；

(2) 对于极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 给出柯西收敛原理；

(3) 设常数$L>0$, $f(x)$是(a,b)上的函数，满足$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall x,y\in(a,b)$, 证明：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在.

草 稿 区

得 分

二、(共20分，每小题10分) 计算下列各题.

(1) 设$a \in \mathbb{R}$, 已知$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a} \right)^{x + a \sin x} = 4$, 求$a$的值.

(2) 设$0 < \alpha < 1$, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n + k^{\alpha}}$, $n = 1, 2, \cdots$, 求极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

草 稿 区

得 分

三、(共16分，每问8分) 设常数$a>0$, 映射$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足函数方程$f(f(x))=x+a$, 证明：

(1) f是双射；

(2) f不是单调递减函数.

得 分

四、(12分) 设$x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{(n+2)(x_n+1)}{2(n+1)}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$f(x) = D(x)\sin x + R(x)$, 求函数$f(x)$的间断点并指出间断点的类型，其中$D(x)$是狄利克雷函数，$R(x)$是黎曼函数.

得 分

六、(10分) 设$f\colon [a,b] \to [a,b]$是一个递增的连续函数，$f(a) = a$, 令$S = \{x \in [a,b] | x \leqslant f(x)\}$, 证明：$f(S) = S$.

草 稿 区

得 分

七、(8分) 设$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > \max\{0, 2-\beta\}$, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^\alpha + k^\beta}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

草 稿 区

得 分

八、(8分) 设$a_1 \in (-1, 2)$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.