数学科学学院伯苓班2019 — 2020学年第一学期“数学分析”期中考试试卷

草 稿 区

专业:　　　　年级:　　　　学号:　　　　姓名:　　　　成绩:

得 分

一、(10分) 设$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. 证明：存在$\delta > 0$, 使得对任意$x \in (x_0 - \delta, x_0)$和任意$y \in (x_0, x_0 + \delta)$, 都有$f(x) < f(y)$.

得 分

二、(12分) 设A_n, B_n和C_n分别是数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$和$\{c_n\}$的前n项和，已知$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明：若数列$\{A_n\}$和$\{C_n\}$都收敛，则数列$\{B_n\}$也收敛.

草 稿 区

得 分

三、(共20分，每小题10分) 计算下列各题.

(1) 设$a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$, 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{1-(1+ax)^b}}$.

(2) 设$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{2x_{n+1}} - \mathrm{e}^{2x_n})$.

草 稿 区

得 分

四、(共31分，其中第(1)问和第(2)问各12分，第(3)问7分)

(1) 任意取定正整数m, 令$x_n^{(m)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)\cdot 2^k}$, $n=1,2,\cdots$. 证明：数列$\left\{x_n^{(m)}\right\}$收敛；

(2) 记$y_m=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(m)}$, $m=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{m\to\infty}y_m=1$；

(3) 问：数列$\{m(y_m-1)\}$是否收敛？证明你的结论.

草 稿 区

得 分

五、(12分) 设$\{x_n\}$是一个有界数列，$x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明：存在数列$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$, 使得$\left\{\frac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}\right\}$收敛.

草 稿 区

得 分

六、(10分) 已知常数$\beta \in (0,1)$，问：是否存在集合$S \subseteq (0,1)$, 使得S是无限集，$\sup S = \beta$, 且对任意$x, y \in S$, $x < y$, 都有$\dfrac{x}{y} \in S$? 若存在，求出满足条件的所有的S; 若不存在，说明理由.

草 稿 区

得 分

七、(5分) 设$0 < \alpha < \beta < 1$. 证明：存在实数x, 使得对任意正整数n, 都有$\{x^n\} \in [\alpha, \beta]$, 其中$\{x^n\} = x^n - [x^n]$是$x^n$的小数部分.