数理科学与大数据本科生2021-2022学年第一学期“数学分析I”月考1试题

一、(10分) 用定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},\ 0<a<1.$

二、(15分) 叙述并证明复合函数的极限法则.

三、(40分) 用现有知识计算以下极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x-\pi}{x-1}$.

四、(10分) 设$x_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$. 试用柯西收敛原理证明数列$\{x_n\}$收敛.

五、(10分) 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$单调递减, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 证明: 若$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

六、(15分) 设$x_1>0$, $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.