数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第二学期“数学分析”期中考试试卷(A卷)

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

草 稿 区

得 分

一、(50分，每小题10分) 按要求解答下列各题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)$ (结果用定积分表示);

(2) 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\cdot\sec^2 x}{\cos^2 x+3}\mathrm{d}x$;

草 稿 区

(3) 求极坐标曲线$r=\sqrt{1-t^2}$, $\theta=\arcsin t+\sqrt{1-t^2}$, $-1\leqslant t\leqslant 1$所围区域的面积;

(4) 求不定积分$\displaystyle\int[\sin(\ln x)+3\cos(\ln x)]\,\mathrm{d}x$;

草 稿 区

(5) 设$[x]$是取整函数, 记$\{x\}=x-[x]$, 计算积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{x^{2019}\right\}\cos x\mathrm{d}x$.

得 分

二、(12分) 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的连续函数. 证明：存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

草 稿 区

得 分

三、(12分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上可积. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^n)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

得 分

四、(10分) 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的单调递增函数. 证明：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\sin f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，问$f(x)$是否一定在$(-\infty,+\infty)$上一致连续？证明你的结论.

草 稿 区

得 分

六、(6分) 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且恒大于0, $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $G(x)=\int_1^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. 又已知常数$\alpha\in(0,1)$, 对任意$x\geqslant 1$, 有$F(x)\leqslant x^{1+\alpha}$. 证明：

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x^{1-\alpha}}\geqslant\frac{1}{1-\alpha^2}.$$