数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第二学期“数学分析”期中考试试卷(A卷)

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

草 稿 区

得 分

一、(50分，每小题10分) 按要求解答下列各题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)$ (结果用定积分表示);

解. 令$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan x}{x}, & x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right],\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$上连续，在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有界. 于是$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上可积，由黎曼积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)\cdot\frac{\pi}{4n+4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x.$$

(2) 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\cdot\sec^2 x}{\cos^2 x+3}\mathrm{d}x$;

解. 令$t=\tan x$换元，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\cdot\sec^2 x}{\cos^2 x+3}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{t}{\frac{1}{t^2+1}+3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3t^3+4t-t}{3t^2+4}\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{6}t^2\Big|_0^1-\frac{1}{18}\ln(3t^2+4)\Big|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}\ln 7+\frac{1}{18}\ln 4\\ &=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}\ln 7+\frac{1}{9}\ln 2.\end{aligned}$$

注. 也可以用$t=\sec x$或$t=\cos x$换元.

草 稿 区

(3) 求极坐标曲线$r=\sqrt{1-t^2}$, $\theta=\arcsin t+\sqrt{1-t^2}$, $-1\leqslant t\leqslant 1$所围区域的面积;

解. 由$\theta'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$可见$\theta(t)$在$[-1,1]$上递增. 于是所求面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}r^2(t)\theta'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

上面倒数第2个等号是利用奇偶性，最后一个等号是利用四分之一单位圆的面积.

(4) 求不定积分$\displaystyle\int[\sin(\ln x)+3\cos(\ln x)]\,\mathrm{d}x$;

解. 令$x=\mathrm{e}^t$换元，得

$$\begin{aligned}\int[\sin(\ln x)+3\cos(\ln x)]\,\mathrm{d}x&=\int(\sin t+3\cos t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t+3\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^t\sin t+2\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记$I=\displaystyle\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$, 则

$$I=\mathrm{e}^t\cos t+\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-I.$$

故

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+C,$$

于是

$$\int[\sin(\ln x)+3\cos(\ln x)]\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+C=2x\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)+C.$$

草 稿 区

(5) 设$[x]$是取整函数, 记$\{x\} = x - [x]$, 计算积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{x^{2019}\right\} \cos x \mathrm{d}x$.

解. 记$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{x^{2019}\right\} \cos x \mathrm{d}x$, 令$x = -t$换元，得$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{-t^{2019}\right\} \cos t \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{-x^{2019}\right\} \cos x \mathrm{d}x$. 于是

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left\{x^{2019}\right\} + \left\{-x^{2019}\right\}\right) \cos x \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left\{x^{2019}\right\} + \left\{-x^{2019}\right\}\right) \cos x \mathrm{d}x.$$

当$a = x^{2019}$不是整数时，有$\{-a\} = 1 - \{a\}$. 注意到$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$中只有有限多个$x$使得$x^{2019}$是整数，就可知$\{x^{2019}\} + \{-x^{2019}\}$在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上除有限多个点之外恒为1. 因此，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = 1.$$

得 分

二、(12分) 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a, b]$上的连续函数. 证明：存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^{b} g(x) \mathrm{d}x = g(\xi) \int_{a}^{\xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

证. 令$F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t$, $G(x) = \int_x^b g(t) \mathrm{d}t$, 则$F(a) = G(b) = 0$. 由微积分基本定理得，对任意$x \in [a, b]$, 有$F'(x) = f(x)$, $G'(x) = -g(x)$. 令$\varphi(x) = F(x)G(x)$, 则$\varphi(x)$在$[a, b]$可导，

$$\varphi'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) - F(x)g(x).$$

由$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 根据罗尔定理知存在$\xi \in (a, b)$, 使得$\varphi'(\xi) = 0$, 即$f(\xi)G(\xi) - F(\xi)g(\xi) = 0$, 整理即得

$$f(\xi) \int_{\xi}^{b} g(x) \mathrm{d}x = g(\xi) \int_{a}^{\xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

草 稿 区

得 分

三、(12分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上可积. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^n)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证. 令$\varphi_n(x)=1-(1-x^n)^n$, $n=1,2,\cdots$, 则问题归为证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$. 因为$f(x)$在$[0,1]$上可积，所以$f(x)$在$[0,1]$上有界. 设$|f(x)|\leqslant M$, 则对任意$\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{1-\varepsilon}^1|f(x)\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{1-\varepsilon}^1 M\mathrm{d}x=M\varepsilon.$$

因为$\varphi_n(x)$在$[0,1]$单增，所以

$$\left|\int_0^{1-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}|f(x)\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}M\varphi_n(1-\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant M\varphi_n(1-\varepsilon).$$

当$a\in(0,1)$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1-a^n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(-a^n)=0$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^n)^n=\mathrm{e}^0=1$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(1-\varepsilon)=1-1=0$. 于是对上述的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 使得当$n>N$时，有$\varphi_n(1-\varepsilon)<\varepsilon$. 因此，当$n>N$时，有

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^{1-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|<M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon.$$

按极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$. 这就完成了证明.

得 分

四、(10分) 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的单调递增函数. 证明：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证. 记$J=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 则问题归为证明$\int_a^b[f(x)-J]g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 先证明$f(x)$在$[a,b]$上连续的情形. 这时，由积分第一中值定理，存在$\xi\in[a,b]$, 使得$J=f(\xi)$. 由$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上递增知对任意$x\in[a,b]$, 有$[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\geqslant 0$, 故$\int_a^b[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\mathrm{d}x\geqslant 0$. 又因为$\int_a^b[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}x=(b-a)J-(b-a)f(\xi)=0$, 所以$\int_a^b[f(x)-J]g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\mathrm{d}x\geqslant 0$. 再证明一般情形. 这时，存在$[a,b]$上的连续函数序列$\{\varphi_n(x)\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x=0$. 于是

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\sin f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，问$f(x)$是否一定在$(-\infty,+\infty)$上一致连续？证明你的结论.

解. 函数$f(x)$一定在$(-\infty,+\infty)$上一致连续. 先证明一个引理.

引理. 存在$x,y\in[a,b]$, 使得$|\sin x-\sin y|\geqslant 1-\cos\dfrac{b-a}{2}$.

引理的证明. 记$\theta=\dfrac{b-a}{2}$. 若$b-a\geqslant 2\pi$, 则存在$x,y\in[a,b]$, 使得$\sin x=1$, $\sin y=-1$, 从而$|\sin x-\sin y|=2\geqslant 1-\cos\theta$. 若$b-a<2\pi$, 则由周期性，不妨设$[a,b]\subseteq\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$. 若$\pi\leqslant b-a<2\pi$, 则$\dfrac{\pi}{2}\in[a,b]$, 且$\dfrac{\pi}{2}+\theta$和$\dfrac{\pi}{2}-\theta$中至少有一个属于$[a,b]$, 不妨设$\dfrac{\pi}{2}+\theta\in[a,b]$, 取$x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\dfrac{\pi}{2}+\theta$, 就有$|\sin x-\sin y|=1-\cos\theta$. 若$0<b-a<\pi$, 则由抽屉原理知，区间$I_1=[a,b]\cap\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$与$I_2=[a,b]\cap\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$至少有一个长度不小于$\theta$. 不妨设区间$I_1$的长度不小于$\theta$, 于是存在$x\in I_1$, 使得$y=x+\theta\in I_1$. 注意到$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}-\theta\right]$, 就有

$$|\sin x-\sin y|=2\cos\left(x+\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\geqslant 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta.$$

“函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续”的证明. 反证. 若不然，则存在函数$f(x)$满足题设条件，但$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续. 由不一致连续的充要条件知存在$\varepsilon_0\in(0,\pi)$, 存在数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$且$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$, $n=1,2,\cdots$. 由引理知，存在$u_n,v_n\in[f(x_n),f(y_n)]$(或$[f(y_n),f(x_n)]$), 使得$|\sin u_n-\sin v_n|\geqslant 1-\cos\dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 由连续函数的介值定理知，存在$x_n',y_n'\in[x_n,y_n]$(或$[y_n,x_n]$), 使得$u_n=f(x_n')$, $v_n=f(y_n')$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-y_n')=0$且$|\sin f(x_n')-\sin f(y_n')|\geqslant 1-\cos\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 因此$\sin f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续. 矛盾！

草 稿 区

得 分

六、(6分) 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且恒大于0, $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $G(x)=\int_1^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. 又已知常数$\alpha\in(0,1)$, 对任意$x\geqslant 1$, 有$F(x)\leqslant x^{1+\alpha}$. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x^{1-\alpha}}\geqslant\frac{1}{1-\alpha^2}.$$

证. 由施瓦兹不等式得

$$G(x)\cdot\int_1^x f(t)t^{-2\alpha}\mathrm{d}t\geqslant\left(\int_1^x\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\cdot\sqrt{f(t)}t^{-\alpha}\right)^2=\frac{(x^{1-\alpha}-1)^2}{(1-\alpha)^2}.$$

由分部积分法和题设条件得

$$\begin{aligned}
&\int_1^x f(t)t^{-2\alpha}\mathrm{d}t\\
=\;& F(t)t^{-2\alpha}\Big|_1^x-\int_1^x F(t)\cdot(-2\alpha)t^{-2\alpha-1}\mathrm{d}t\\
=\;& F(x)x^{-2\alpha}+2\alpha\int_1^x F(t)t^{-2\alpha-1}\mathrm{d}t\\
\leqslant\;& x^{1-\alpha}+2\alpha\int_1^x t^{-\alpha}\mathrm{d}t\\
=\;& x^{1-\alpha}+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1)\\
=\;& \frac{1+\alpha}{1-\alpha}x^{1-\alpha}-\frac{2\alpha}{1-\alpha}\\
\leqslant\;& \frac{1+\alpha}{1-\alpha}x^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{G(x)}{x^{1-\alpha}}\geqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{(x^{1-\alpha}-1)^2}{(1-\alpha)^2x^{2(1-\alpha)}}=\frac{(1-x^{\alpha-1})^2}{1-\alpha^2}.$$

上式两边令$x\to+\infty$取下极限，得

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x^{1-\alpha}}\geqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x^{\alpha-1})^2}{1-\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha^2}.$$