20级数学分析I第1次月考试题参考解答

一、(本题20分) 用定义证明：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$$

证 因为

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|=\left|\frac{2x+5}{x^2-2}\right|.$$

当$|x|>5$时, 有

$$|2x+5|\leqslant 2|x|+5<3|x|,$$

与

$$|x^2-2|\geqslant |x|^2-2>\frac{|x|^2}{2},$$

故而

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|=\left|\frac{2x+5}{x^2-2}\right|<\frac{6}{|x|}.$$

对于任给的$\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|<\varepsilon,$$

当$|x|>5$时, 只要$\dfrac{6}{|x|}<\varepsilon$，或$|x|>\dfrac{6}{\varepsilon}$. 取$X=\max\left\{5,\dfrac{6}{\varepsilon}\right\}$, 则当$|x|>X$时, 就有

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|<\varepsilon.$$

由定义知$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3$成立. □

二、(本题15分) 设$a>0$, $x_1>0$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ n=1,2,\cdots.$$

求数列$\{x_n\}$的极限.

解 显然有$x_n > 0$, 而且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} = \sqrt{a},\ n \geqslant 1,$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n} \leqslant 0,\ n \geqslant 2,$$

即当$n \geqslant 2$时, $\{x_n\}$单调递减, 有下界, 所以数列$\{x_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, 则$l \geqslant \sqrt{a}$. 在$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$两边取极限, 得$l = \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a}{l}\right)$, 解出$l = \sqrt{a}$或$l = -\sqrt{a}$（舍）. 所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

三、(本题15分) 设$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$, 数列$\{n^2(x_n - x_{n-1})\}$收敛，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 因为数列$\{n^2(x_n - x_{n-1})\}$收敛，所以数列$\{n^2(x_n - x_{n-1})\}$有界，即存在$M > 0$, 使得对任何整数$n > 1$, 有$|n^2(x_n - x_{n-1})| \leqslant M$. 于是对任何正整数$n$和$p$, 有

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left|\sum_{k=1}^{p}(a_{n+k} - a_{n+k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| \\ \leqslant & \sum_{k=1}^{p} \frac{M}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{M}{(n+k)(n+k-1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) M < \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

因此，对任意给定的$\varepsilon > 0$, 取$N = \left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当$n > N$时，对任意正整数$p$, 有

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

故由柯西收敛原理知数列$\{x_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 由2.1节的例题知$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = b$, 再由题设$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$与极限的唯一性知$a = b$. 所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

四、(本题30分) 用现有知识计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x \sin\frac{1}{x}\right) \ln x$.

解 1. 因为$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$, 所以$\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=\ln\left(1+\dfrac{2\tan x}{1-\tan x}\right)\sim\dfrac{2\tan x}{1-\tan x}\ (x\to 0)$. 于是

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\tan x}{1-\tan x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan x}=1\cdot\frac{1}{1-0}=1.$$

2. 令$y=\dfrac{1}{x}$.

$$原式=\lim_{y\to 0^+}\left[-\ln\frac{\sin y}{y}\ln y\right]=\lim_{y\to 0^+}\left[-\left(\frac{\sin y}{y}-1\right)\ln y\right].$$

又因为当$y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，有$0<1-\frac{\sin y}{y}<1-\cos y$, 所以结合$1-\cos y\sim\dfrac{y^2}{2}\ (y\to 0^+)$，根据两边夹定理知$\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{1-\frac{\sin y}{y}}{y}=0$. 于是

$$原式=\lim_{y\to 0^+}\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\ln y=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\frac{\sin y}{y}}{y}\cdot\lim_{x\to 0^+}y\ln y=0\cdot 0=0.$$

□

五、(本题10分) 用定义证明数列$\{\cos n\}$发散.

证 反证. 设数列$\{\cos n\}$收敛, 极限值记为a, 于是对$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 存在正整数N, 使得当$n>N$时, 有$|\cos n-a|<\varepsilon=\dfrac{1}{2}$. 对任何正整数$k$, 由于$\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\left[2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},(2k+1)\pi\right]$区间长度都大于1, 故存在正整数$n_k\in\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right]$, $m_k\in\left[2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},(2k+1)\pi\right]$. 取$k=N$, 那么$n_k>N$, 从而$|\cos n_k-a|<\dfrac{1}{2}$, 由$\cos n_k\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$可见$a>0$; 同理由$m_k>N$得$|\cos m_k-a|<\dfrac{1}{2}$, 从$\cos m_k\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$可知$a<0$. 矛盾!

□

六、(本题10分) 设$f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$中有定义. 证明$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$的充分必要条件是对$(x_0,x_0+\delta)$中任何严格递减的以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

证 “$\Longrightarrow$”. 由单侧极限的海涅定理即得.

“$\Longleftarrow$”. 反证. 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$, 则存在$\varepsilon_0>0$, 使对任何$\eta\in(0,\delta)$, 都存在$x_\eta$, 使得

$$x_0<x_\eta<x_0+\eta, 并且|f(x_\eta)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\eta_1=\dfrac{\delta}{2}$, 就有x_1, 满足

$$x_0<x_1<x_0+\eta_1, 并且|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\eta_2=\min\left\{\dfrac{\delta}{3},x_1-x_0\right\}$, 就有$x_2$, 满足

$$x_0<x_2<x_0+\eta_2, 并且|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

一直这样做下去，一般地，设x_{n-1}已取定，令$\eta_n=\min\left\{\dfrac{\delta}{n+1},x_{n-1}-x_0\right\}$, 就有$x_n$, 满足

$$x_0<x_n<x_0+\eta_n, 并且|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

这样就得到数列$\{x_n\}$, 使得

$$x_0<x_n<x_0+\min\left\{\frac{\delta}{n+1},x_{n-1}-x_0\right\}, 并且|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

由$x_n<x_{n-1}$知$\{x_n\}$是$(x_0,x_0+\delta)$中的一个严格递减数列，由$0<x_n-x_0<\dfrac{\delta}{n+1}$知$\{x_n\}$以$x_0$为极限，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$, 这与假设矛盾. 从而必有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. □