数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第一学期“数学分析”期中考试试卷

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(共16分，其中第(1)问和第(2)问各4分，第(3)问8分)

(1) 写出 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的$\varepsilon-\delta$定义；

(2) 对于极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 给出柯西收敛原理；

(3) 设常数$L>0$, $f(x)$是(a,b)上的函数，满足$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall x,y\in(a,b)$, 证明：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在.

(1) 答. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的$\varepsilon-\delta$定义如下：存在$a\in\mathbb{R}$, 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$|f(x)-a|<\varepsilon$.

(2) 答. 极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$的柯西收敛原理如下：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$x,y\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(3) 证. 对任意给定的$\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{L},b-a\right\}>0$, 则当$x,y\in(a,a+\delta)$时，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|<L\delta\leqslant\varepsilon.$$

由柯西收敛原理知$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在.

草 稿 区

得 分

二、(共20分，每小题10分) 计算下列各题.

(1) 设$a \in \mathbb{R}$, 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x+a\sin x}=4$, 求$a$的值.

解. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+a\sin x}{x}=1+a\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1+a\cdot 0=1$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+a\sin x)\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{2a}{x-a}=2a.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x+a\sin x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+a\sin x)\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}=\mathrm{e}^{2a}.$$

由$\mathrm{e}^{2a}=4$得$2a=\ln 4$, 解得$a=\ln 2$.

(2) 设$0<\alpha<1$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}$, $n=1,2,\cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 因为

$$\frac{1}{1+n^{\alpha-1}}=n\cdot\frac{1}{n+n^\alpha}\leqslant x_n\leqslant n\cdot\frac{1}{n}=1,$$

且由$0<\alpha<1$得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n^{\alpha-1}}=\dfrac{1}{1+0}=1$, 所以由两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

草 稿 区

得 分

三、(共16分，每问8分) 设常数$a>0$, 映射$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足函数方程$f(f(x))=x+a$, 证明：

(1) f是双射；
(2) f不是单调递减函数.

证. (1) 反证. 若不然，则f不是单射或f不是满射. 若f不是单射，则存在实数$x_1\neq x_2$, 使得$f(x_1)=f(x_2)$, 从而$x_1+a=f(f(x_1))=f(f(x_2))=x_2+a$, 与$x_1\neq x_2$矛盾；若$f$不是满射，则存在实数$y_0$, 使得$y_0$不属于$f$的值域，这与$f(f(y_0-a))=y_0$矛盾！

(2) 反证. 若不然，则f是单调递减函数. 于是$f(x+a)=f(f(f(x)))=f(x)+a>f(x)$, 这与$f$单调递减矛盾！

得 分

四、(12分) 设$x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{(n+2)(x_n+1)}{2(n+1)}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证. 显然$\{x_n\}$是正数列. 对任意正整数n, 有

$$\begin{aligned}
&x_{n+2}-x_{n+1}\\
=\ &\frac{(n+3)(x_{n+1}+1)}{2(n+2)}-\frac{(n+2)(x_n+1)}{2(n+1)}\\
=\ &\frac{(n+1)(n+3)(x_{n+1}+1)-(n+2)^2(x_n+1)}{2(n+1)(n+2)}\\
=\ &\frac{(n+2)^2(x_{n+1}-x_n)-x_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

因此，$x_{n+1}-x_n\leqslant 0$蕴涵$x_{n+2}<x_{n+1}$. 注意到$x_3=x_4=\dfrac{5}{3}$, 就可得$x_{n+1}<x_n$, $n=4,5,\cdots$. 于是根据单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 在$x_{n+1}=\dfrac{(n+2)(x_n+1)}{2(n+1)}$两边令$n\to\infty$取极限，得$A=\dfrac{A+1}{2}$, 解得$A=1$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$f(x) = D(x)\sin x + R(x)$, 求函数$f(x)$的间断点并指出间断点的类型，其中$D(x)$是狄利克雷函数，$R(x)$是黎曼函数.

解. 对任意实数x_0, 都有$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. 当$x_0 = n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$时，$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)\sin x = 0$, 从而$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. 又$f(0) = 1$, $f(n\pi) = 0$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, 故$f(x)$在$n\pi$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$处连续，在0点处间断，0点是$f(x)$的可去间断点.

当$x_0 \neq n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$时，取一个有理数列$\{y_n\}$趋于x_0, $y_n > x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} D(y_n)\sin y_n = \sin x_0 \neq 0$, 取一个无理数列$\{z_n\}$趋于$x_0$, $z_n > x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} D(z_n)\sin z_n = 0$. 故由海涅定理知$\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)\sin x$不存在，于是$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$不存在. 因此，当$x_0 \neq n\pi$ $(n\mathbb{Z})$时，x_0是$f(x)$的第二类间断点.

得 分

六、(10分) 设$f\colon [a,b] \to [a,b]$是一个递增的连续函数，$f(a) = a$, 令$S = \big\{x\in[a,b] \big| x \leqslant f(x)\big\}$, 证明：$f(S) = S$.

证. 任取$y\in f(S)$, 则存在$x\in S$, 使得$y = f(x)$. 由$x\in S$知$x \leqslant f(x)$, 从而由f递增得$f(x) \leqslant f(f(x))$, 即$y \leqslant f(y)$. 因此$y\in S$. 这就证明了$f(S)\subseteq S$.

任取$x\in S$, 则$x \leqslant f(x)$. 若$x = f(x)$, 则$x\in f(S)$. 若$x < f(x)$, 则$f(a) = a < x < f(x)$, 由介值定理知存在$\xi\in(a,x)$, 使得$f(\xi) = x$. 于是$f(\xi) = x < f(x) = f(f(\xi))$, 由$f$递增知$\xi < f(\xi)$. 因此$\xi\in S$, 从而$x = f(\xi)\in f(S)$. 这就证明了$S\subseteq f(S)$.

合起来，就得到了$f(S) = S$.

草 稿 区

得 分

七、(8分) 设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>\max\{0,2-\beta\}$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^{\alpha}+k^{\beta}}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证. 由$\alpha>\max\{0,2-\beta\}$知$\alpha>0$且$\alpha+\beta>2$. 由均值不等式得

$$0<x_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}k^{\frac{\beta}{2}}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{-\frac{\beta}{2}}}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{$*$}$$

因为当$p\neq 0$时，有$(1+x)^p-1\sim px\ (x\to 0)$, 所以

$$(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}-n^{\frac{\alpha}{2}}=n^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}-1\right]\sim n^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2n^{1-\frac{\alpha}{2}}}\quad (n\to\infty).$$

于是由施笃兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{-\frac{\beta}{2}}}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{-\frac{\beta}{2}}}{2\left[(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}-n^{\frac{\alpha}{2}}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{\beta}{2}}}{\frac{\alpha}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\alpha}=0.$$

因此，由$(*)$式根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

注. 可以证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$的充分必要条件是$\alpha>0$且$\max\{\alpha,\beta\}>1$.

草 稿 区

得 分

八、(8分) 设$a_1 \in (-1,2)$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$, $n = 1,2,\cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证. 当$a_n = 1$时，$a_{n+1} = 0$; 当$a_n = 0$时，$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$. 因此，若数列$\{a_n\}$的某一项等于1或0, 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 下面假设数列$\{a_n\}$的每一项都不等于0或1.

若$a_1 \in (-1,0)$, 则$a_2 \in (0,2)$, 故不妨设$a_1 > 0$. 下面证明存在正整数n_0, 使得$a_{n_0} \in (0,1)$. 反证. 若不然，则$a_n \in (1,2)$, $n = 1,2,\cdots$. 这时，$a_{n+1} = a_n(a_n - 1) < a_n$, $n = 1,2,\cdots$, 由单调收敛定理知$\{a_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则$A \in [1,2)$. 在$a_{n+1} = a_n^2 - a_n$两边令$n \to \infty$取极限，得$A = A^2 - A$, 解得$A = 0$或$A = 2$, 与$A \in [1,2)$矛盾！

由$a_{n_0} \in (0,1)$知不妨设$a_1 \in (0,1)$. 于是$a_2 \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right)$, 进而$a_3 \in (0,1)$. 用数学归纳法不难证明$a_{2k-1} \in (0,1)$, $a_{2k} \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right)$, $k = 1,2,\cdots$. 注意到$0 < \dfrac{a_{n+2}}{a_n} = 1 - 2a_n^2 + a_n^3 < 1$, 就可见数列$\{a_{2k-1}\}$严格递减，数列$\{a_{2k}\}$严格递增. 由单调收敛定理知数列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛. 设$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = B$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = C$, 则$B \geqslant 0$, $C \leqslant 0$. 在$a_{2k+1} = a_{2k}^2 - a_{2k}$两边令$n \to \infty$取极限，得$B = C^2 - C$; 在$a_{2k} = a_{2k-1}^2 - a_{2k-1}$ 两边令$n \to \infty$ 取极限，得$C = B^2 - B$. 于是$B^2 = B + C = C^2$, 结合$B \geqslant 0$, $C \leqslant 0$得$B = -C$, 从而$B^2 = 0 = C^2$, 即$B = C = 0$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.