数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第一学期“数学分析I”期末考试试卷(A卷) 参考解答

草 稿 区

任课教师:　　**学号:**　　**姓名:**　　**成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 设$\{x_n\}$是一个数列. 用致密性定理证明：如果对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 当$m > N$, $n > N$时, 就有$|x_m - x_n| < \varepsilon$, 则数列$\{x_n\}$收敛.

证 首先证明$\{x_n\}$是一个有界数列. 依题意, 取$\varepsilon = 1$, 则存在正整数N_0, 使当$m, n > N_0$时, 成立

$$|x_n - x_m| < 1.$$

特殊地, 取$m = N_0 + 1$, 则$|x_n - x_{N_0+1}| < 1$, 于是有

$$|x_n| < |x_{N_0+1}| + 1, \forall n > N_0.$$

这表明$\{x_n\}$有界. 由致密性定理, $\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, 以下证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数K, 当$k > K$ 时, 成立

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

依题意, 对于以上$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$m, n > N$时, 成立

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

记$k_0 = \max\{K + 1, N + 1\}$, 则$k_0 > K$而$n_{k_0} \geqslant k_0 > N$. 因而, 当$n > N$时, 成立

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

草 稿 区

得 分

二、(30分) 计算下列各题.

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(\sin x)}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(2) 求不定积分$\displaystyle\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 (1) 注意到$\sin(\sin x)\sim x\ (x\to0)$, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2(\sin x)}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2(\sin x)}{x^2\sin^2(\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2(\sin x)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin(\sin x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(\sin x)}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(\sin x)}{x^3}.\end{aligned}$$

由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(\sin x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos^2x+\cos(\sin x)\sin x}{6x}\\&=\frac16\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin(\sin x)}{x}\cos^2x+\frac{\sin x}{x}\cos(\sin x)\right]=\frac16(1\cdot1^2+1\cdot1)=\frac13.\end{aligned}$$

因此，有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2(\sin x)}-\frac{1}{x^2}\right)=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(\sin x)}{x^3}=\frac23.$$

(2) 令$x=\mathrm{e}^t$，则$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$. 于是有

$$\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^t\cos t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^{2t}\cos t\mathrm{d}t.$$

记$I=\displaystyle\int\mathrm{e}^{2t}\cos t\mathrm{d}t$, 由分部积分法，有

$$\begin{aligned}I&=\int\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}(\sin t)=\mathrm{e}^{2t}\sin t-\int\sin t\cdot2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2t}\sin t-2\int\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}(-\cos t)\\&=\mathrm{e}^{2t}\sin t-2\left(-\mathrm{e}^{2t}\cos t-\int(-\cos t)\cdot2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{2t}(\sin t+2\cos t)-4I.\end{aligned}$$

移项并整理，得到

$$I=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{5}(\sin t+2\cos t)+C.$$

将$t=\ln x$代入，得

$$\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x=I=\frac{x^2}{5}\left[\sin(\ln x)+2\cos(\ln x)\right]+C.$$

□

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续可导，在(a,b)两次可导，$f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, $\xi_1\neq\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$.

证 在$[a,b]$上对$f(x)$应用罗尔定理，知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$. 在$[a,\xi]$上对$f'(x)$应用罗尔定理，知存在$\xi_1\in(a,\xi)$, 使得$f''(\xi_1)=0$. 在$[\xi,b]$上对$f'(x)$应用罗尔定理，知存在$\xi_2\in(\xi,b)$, 使得$f''(\xi_2)=0$. 因此，$\xi_1\neq\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$. □

另证 由泰勒公式，存在$\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$, 使得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\cdot\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

前式减去后式，得

$$\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=0.$$

所以，$\xi_1\neq\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$. □

草 稿 区

得 分

四、(15分) 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上可导且导数$f'(x)$在$[1,+\infty)$上有界. 证明：$\dfrac{f(x)}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

证 由$f'(x)$在$[1,+\infty)$上有界知，存在$M>0$, 使得对任何$x\in[1,+\infty)$, 都有$|f'(x)|\leqslant M$. 对任意$x>1$, 由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(1,x)$, 使得$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$. 于是对任意$x>1$, 有

$$\frac{|f(x)|}{x}=\frac{|f'(\xi)(x-1)+f(1)|}{x}\leqslant\frac{|f'(\xi)|(x-1)}{x}+\frac{|f(1)|}{x}\leqslant M+|f(1)|.$$

当$x=1$时，$\dfrac{|f(x)|}{x}\leqslant M+|f(1)|$也成立. 记$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 就有

$$|g'(x)|=\left|\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right|\leqslant\frac{|f'(x)|}{x}+\frac{|f(x)|}{x^2}\leqslant|f'(x)|+\frac{|f(x)|}{x}\leqslant M+(M+|f(1)|)=2M+|f(1)|.$$

因此，$g'(x)$在$[1,+\infty)$上有界. 教材在例题中给出了命题：“若函数$f(x)$在区间I可导且导数$f'(x)$在区间I有界, 则$f(x)$在区间I一致连续”，所以，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续. □

草 稿 区

得 分

五、(15分) (1) 证明：对任意正整数n, 关于x的方程$\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k = 1$在$(0,1)$中有且只有一个根$x_n$;

(2) 证明数列$\{x_n\}$ 收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(1) **证** 令$f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k - 1$, 则$f_n(x)$在$[0,1]$连续, $n = 1, 2, \cdots$. 因为$f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n \geqslant 1 > 0$, 所以由根的存在定理知，方程$f_n(x) = 0$在$(0,1)$内有根. 又$f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} > 0, \forall x \in (0,1)$, 故$f_n(x)$在$[0,1]$严格递增. 所以，方程$f_n(x) = 0$在$(0,1)$内只有唯一根$x_n$, 即方程$\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k = 1$在$(0,1)$中有且只有一个根$x_n$.

(2) **解** 由

$$0 = f_n(x_n) = f_{n-1}(x_{n-1}) < f_n(x_{n-1})$$

且$f_n(x)$严格递增知, 数列$\{x_n\}$单减. 又数列$\{x_n\}$有下界0, 从而由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. 记$A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 由

$$0 \leqslant x_n^{n+2} \leqslant x_1^{n+2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2}$$

及两边夹定理，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n+2} = 0$. 由

$$0 = f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+2}}{1 - x_n} - 1,$$

两边令$n \to \infty$取极限, 得$0 = \dfrac{A - 0}{1 - A} - 1$, 解得$A = \dfrac{1}{2}$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. □

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设函数$f(x)$是从(a,b)到(a,b)的映射，$f(x)$在(a,b)连续可导，$\xi\in(a,b)$满足$f(\xi)=\xi$且$|f'(\xi)|<1$. 证明：存在$x_1\in(a,b)$, $x_1\neq\xi$, 使得由递推关系$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$定义的数列$\{x_n\}$收敛于ξ.

证 记$\lambda=\dfrac{|f'(\xi)|+1}{2}\in(0,1)$. 因为函数$f(x)$在$(a,b)$连续可导，$\xi\in(a,b)$满足$|f'(\xi)|<1$, 所以存在$\delta>0$, 使得$[\xi-\delta,\xi+\delta]\subseteq(a,b)$, 且当$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$时，有$|f'(x)|\leqslant\lambda$.

对任意$x,y\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$, $x\neq y$, 由拉格朗日中值定理知，存在η介于x和y之间，使得$f(x)-f(y)=f'(\eta)(x-y)$. 于是有

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\eta)||x-y|\leqslant\lambda|x-y|.$$

易见上式对$x=y$也成立.

对任意$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$, $x\neq\xi$, 由上面的讨论和$f(\xi)=\xi$, 得

$$|f(x)-\xi|=|f(x)-f(\xi)|\leqslant\lambda|x-\xi|\leqslant\lambda\delta<\delta.$$

所以，对任意$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$, 有$f(x)\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$.

任意取定$x_1\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$且$x_1\neq\xi$, 则由上面的讨论，根据数学归纳法知对任意正整数$n$, 都有$x_{n+1}=f(x_n)\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$. 因此，对任何大于1的正整数$n$, 有

$$|x_n-\xi|=|f(x_{n-1})-f(\xi)|\leqslant\lambda|x_{n-1}-\xi|,$$

由此得到

$$0\leqslant|x_n-\xi|\leqslant\lambda|x_{n-1}-\xi|\leqslant\lambda^2|x_{n-2}-\xi|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^{n-1}|x_1-\xi|.$$

因为$\lambda\in(0,1)$, 所以由上式和两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi|=0$. 由此即得数列$\{x_n\}$收敛于$\xi$. $\square$