22级数学分析I第1次月考试题

一、(本题15分) 用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2022}{n^2-n+1}=5.$

二、(本题15分) 设函数$f(x)$在$(0,b)$有定义，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\infty$. 证明：对任何$a\in(0,b)$, 函数$g(x)=f(x)\cos\dfrac{1}{x}$在$(0,a)$上无界.

三、(本题15分) 设$a\in\mathbb{R}$, 令$x_1=a$, $x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$, $n=1,2,\cdots$. 证明：数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$a\in[0,1]$.

四、(本题15分) 设$x_0\in\mathbb{R}$, 函数$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & \text{当}x\text{为有理数，}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数.}\end{cases}$ 证明：极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在当且仅当$x_0\in\mathbb{Z}$.

五、(本题15分) 对于极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, 叙述并证明柯西收敛原理.

六、(本题15分) 用现有知识计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{\ln(1+x)\cdot\ln(\sin x+\cos x)}$.

七、(本题10分) 设$\{x_n\}$是一个正数数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$, 数列$\left\{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\}$有界. 证明：对任意$p>1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}=0.$$