数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第一学期“数学分析I”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 设$\{x_n\}$是一个数列. 用致密性定理证明：如果对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 当$m > N$, $n > N$时, 就有$|x_m - x_n| < \varepsilon$, 则数列$\{x_n\}$收敛.

草 稿 区

得 分

二、(30分) 计算下列各题.

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(\sin x)}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(2) 求不定积分$\displaystyle\int x\cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续可导，在(a,b)两次可导，$f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, $\xi_1\neq\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$.

草 稿 区

得 分

四、(15分) 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上可导且导数$f'(x)$在$[1,+\infty)$上有界. 证明：$\dfrac{f(x)}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

草 稿 区

得 分

五、(15分) (1) 证明：对任意正整数n, 关于x的方程$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1$在$(0,1)$中有且只有一个根x_n;

(2) 证明数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim_{n\to\infty} x_n$.

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设函数$f(x)$是从(a,b)到(a,b)的映射，$f(x)$在(a,b)连续可导，$\xi \in (a,b)$满足$f(\xi) = \xi$且$|f'(\xi)| < 1$. 证明：存在$x_1 \in (a,b)$, $x_1 \neq \xi$, 使得由递推关系$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$定义的数列$\{x_n\}$收敛于ξ.