数理科学与大数据本科生2021 — 2022学年第一学期“数学分析I”月考1试卷

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(10分) 用定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},\ 0<a<1.$

证 因为$|a^x-a^{x_0}| = a^{x_0}\,|a^{x-x_0}-1|$, 所以对任意给定的$\varepsilon>0$ (不妨设$\varepsilon<a^{x_0}$), 为使$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$, 只要$|a^{x-x_0}-1|<\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$, 或等价地,

$$\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right) < (x-x_0)\ln a < \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right).$$

令

$$s(\varepsilon)=\min\left\{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right), -\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)\right\},$$

则结合$0<a<1$得 $|x-x_0|\cdot(-\ln a)<s(\varepsilon)$, 即

$$|x-x_0| < -\frac{s(\varepsilon)}{\ln a}.$$

取$\delta=-\dfrac{s(\varepsilon)}{\ln a}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$. 按函数极限的定义知$\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$. □

注 也可以取以a为底的对数，这时$\delta=\min\left\{-\log_a\left(1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right), \log_a\left(1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)\right\}$.

草 稿 区

得 分

二、(15分) 叙述并证明复合函数的极限法则.

复合函数的极限法则 设$\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$且存在$\delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$g(x)\neq y_0$, 则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

证 因$\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, 故对任何 $\varepsilon>0$, 都存在$\eta>0$, 当$0<|y-y_0|<\eta$时, 就有

$$|f(y)-A|<\varepsilon.$$

又因$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, 故对上述$\eta>0$, 存在$\delta'\in(0,\delta)$, 当$0<|x-x_0|<\delta'$时, 就有$|g(x)-y_0|<\eta$. 由已知, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, $g(x)\neq y_0$, 故当$0<|x-x_0|<\delta'$时, 就有

$$0<|g(x)-y_0|<\eta.$$

也即, 当$0<|x-x_0|<\delta'$时, 有

$$|f(g(x))-A|<\varepsilon.$$

故得$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$. $\square$

草 稿 区

得 分

三、(40分，共4小题，每小题10分) 用现有知识计算以下极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

解 (1) 因为当$x\to 0$时，有$\sin x\sim x$,

$$\sqrt[3]{1+x}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(1+x)}-1\sim\frac{1}{3}\ln(1+x)\sim\frac{x}{3},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

(2) 因为当$x\to 0$时，有$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, 所以当$x\to 0$时，有

$$1-\cos(1-\cos x)\sim\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}=\frac{x^4}{8}.$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}}{x^4}=\frac{1}{8}.$$

$\square$

草 稿 区

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4\arctan x-\pi}{x-1}$.

解 (3) 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=\frac{0+0}{0+1}+1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{-x}=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

(4) 令$y=\arctan x-\dfrac{\pi}{4}$, 则当$x\to1$时，有$y\to0$, 当$x\neq1$时，有$y\neq0$. 于是有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\frac{4\arctan x-\pi}{x-1}\\
=\;&\lim_{y\to0}\frac{4y}{\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1}\\
=\;&\lim_{y\to0}\frac{4y}{\frac{\tan y+1}{1-\tan y}-1}\\
=\;&\lim_{y\to0}\frac{2y(1-\tan y)}{\tan y}\\
=\;&2\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to0}\cos y(1-\tan y)\\
=\;&2\cdot1\cdot1(1-0)\\
=\;&2.
\end{aligned}$$

□

草 稿 区

得 分

四、(10分) 设$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $n = 1,2,\cdots$. 试用柯西收敛原理证明数列$\{x_n\}$收敛.

证 先证明不等式：对任意正整数n和p, 有$0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n+1}$. 这是因为，若$p$为偶数，则

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) > 0,$$

若p为奇数，则

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) + \frac{1}{n+p} > 0;$$

若p为偶数，则

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1},$$

若p为奇数，则

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

对任意给定的$\varepsilon > 0$, 取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当$n > N$时，对任意正整数$p$, 有

$$\begin{aligned} & |x_{n+p} - x_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1}\frac{1}{n+p}\right| \\ = & \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} \\ \leqslant & \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

由柯西收敛原理知数列$\{x_n\}$收敛. □

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$知：对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N_1$, 当$n > N_1$时, 有$|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 即

$$A - \varepsilon < f(x_n) < A + \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$知：对任意$x > x_{N_1+1}$, 存在正整数$N_2$, 当$n > N_2$时, 有$x_n > x$. 取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 那么当$n > N$时, 有$x_n > x > x_{N_1+1}$. 再结合函数$f(x)$在$(a,+\infty)$单调递减得

$$A - \varepsilon < f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{N_1+1}) < A + \varepsilon,$$

即当$x > x_{N_1+1}$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$. 按函数极限定义知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. $\square$

草 稿 区

得 分

六、(15分) 设$x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

证 按x_1的值分情形讨论.

(i) $x_1 = \sqrt{3}$的情形. 这时，有$x_2 = \dfrac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. 于是对任意正整数$n$, 都有$x_n = \sqrt{3}$. 故数列$\{x_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

(ii) $x_1 > \sqrt{3}$的情形. 先用数学归纳法证明对任意正整数n, 都有$x_n > \sqrt{3}$. $n = 1$时命题成立，设n时命题成立，则$n+1$时，有

$$x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} = 3 - \frac{6}{3+x_n} > 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

由数学归纳法就证明了对任意正整数n, 都有$x_n > \sqrt{3}$. 因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0,$$

所以数列$\{x_n\}$严格递减. 又数列$\{x_n\}$有下界$\sqrt{3}$, 故由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. 记$A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则$A > 0$. 在$x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$两边令$n \to \infty$取极限，得$A = \dfrac{3(1+A)}{3+A}$, 化简得$A^2 = 3$, 解得$A = \sqrt{3}$或$A = -\sqrt{3}$(舍去). 所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

(iii) $0 < x_1 < \sqrt{3}$的情形. 显然对任意正整数n, 都有$x_n > 0$. 下面用数学归纳法证明对任意正整数n, 都有$x_n < \sqrt{3}$. $n = 1$时命题成立，设n时命题成立，则$n+1$时，有

$$x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} = 3 - \frac{6}{3+x_n} < 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

由数学归纳法就证明了对任意正整数n, 都有$x_n < \sqrt{3}$. 因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0,$$

所以数列$\{x_n\}$严格递增. 又数列$\{x_n\}$有上界$\sqrt{3}$, 故由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. 记$A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则$A > 0$. 在$x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$两边令$n \to \infty$取极限，得$A = \dfrac{3(1+A)}{3+A}$, 化简得$A^2 = 3$, 解得$A = \sqrt{3}$或$A = -\sqrt{3}$(舍去). 所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. □