

## 数学学院2022年春季伯苓班选拔抽象代数试题

本试卷考试时间 90 分钟, 满分 50 分. 注意本试卷共 4 道题, 所有题目都是解答题, 必须写出必要的步骤.

1. (本题10分) 设 $H, K$ 都是群 $G$ 的正规子群, 证明:

- (1)  $HK$ 是 $G$ 的正规子群,  $HK/H$ 是 $G/H$ 的正规子群.
- (2) 商群 $G/HK$ 与商群 $(G/H)/(HK/H)$ 同构.

2. (本题10分) 设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ . 已知 $\alpha = a + b\sqrt{-3} \in R$ , 且 $a^2 + 3b^2$ 是素数, 证明 $\alpha$ 是 $R$ 中的素元素. 试问 $R$ 是唯一分解整环吗? 为什么?

3. (本题15分) 设 $G$ 为有限群,  $\varphi$ 为 $G$ 的自同构. 令 $I = \{g \in G \mid \varphi(g) = g^{-1}\}$ . 已知 $|I| > \frac{3}{4}|G|$ , 证明 $G$ 是交换群.

4. (本题15分) 一个幺环 $R$ 称为对合环, 如何对任何 $R$ 中的可逆元 $a$ , 都有 $a^2 = 1$ , 其中1为 $R$ 的单位元. 试证明:  $\mathbb{Z}_m, m > 1$ , 为对合环当且仅当  $m = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ .