22级数学分析I第1次月考试题参考解答

一、(本题15分) 用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2022}{n^2-n+1}=5.$

证 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 取$N=\max\left\{2017,\left[\frac{12}{\varepsilon}\right]\right\}$, 则当$n>N$时, 就有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{5n^2+2022}{n^2-n+1}-5\right|\\
=&\ \frac{5n+2017}{n^2-n+1}\\
<&\ \frac{5n+n}{n^2-\frac{n^2}{2}}\\
=&\ \frac{12}{n}\\
<&\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

按数列极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2022}{n^2-n+1}=5.$ □

二、(本题15分) 设函数$f(x)$在$(0,b)$有定义，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. 证明：对任何$a \in (0,b)$, 函数$g(x) = f(x)\cos\dfrac{1}{x}$在$(0,a)$上无界.

证 任意取定$M>0$. 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, 所以对上述$M>0$, 存在$\delta \in (0,b)$, 当$0<x<\delta$时，有$|f(x)|>M$. 取$n_0 = \left[\dfrac{1}{2\min\{a,\delta\}\pi}\right]+1$, 则$\dfrac{1}{2n_0\pi} < \min\{a,\delta\}$. 令$x_0 = \dfrac{1}{2n_0\pi}$, 则$x_0 \in (0,a)$. 由$0<x_0<\delta$得$|f(x_0)|>M$, 从而

$$|g(x_0)| = \left|f(x_0)\cos\frac{1}{x_0}\right| = |f(x_0)| > M.$$

按无界函数的定义知函数$g(x) = f(x)\cos\dfrac{1}{x}$在$(0,a)$上无界. $\square$

三、(本题15分) 设$a\in\mathbb{R}$, 令$x_1=a$, $x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$, $n=1,2,\cdots$. 证明：数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$a\in[0,1]$.

证 由$x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$得$x_{n+1}-x_n=x_n^2-2x_n+1=(x_n-1)^2\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$, 故数列$\{x_n\}$单调递增.

“$\Leftarrow$”. 已知$a\in[0,1]$, 下面证明数列$\{x_n\}$收敛. 先用数学归纳法证明“$x_n\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$”. 当$n=1$时，$x_1=a\in[0,1]$, 命题成立；设n时命题成立，即$x_n\in[0,1]$, 则由数列$\{x_n\}$单调递增知$x_{n+1}\geqslant x_n\geqslant 0$, 由$x_{n+1}=x_n^2-x_n+1=1-x_n(1-x_n)$和$x_n\in[0,1]$知$x_{n+1}\leqslant 1$, 故$x_{n+1}\in[0,1]$. 由数学归纳法知“$x_n\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$”. 然后根据单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛.

“$\Rightarrow$”. 已知数列$\{x_n\}$收敛，下面证明$a\in[0,1]$. 反证. 若不然，则$a>1$或$a<0$. 记$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 在$x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$两边令$n\to\infty$取极限，得$A=A^2-A+1$, 解得$A=1$.

下面分$a>1$和$a<0$两种情形讨论.

(i) $a>1$的情形.

这时，由数列$\{x_n\}$单调递增知$x_n\geqslant x_1=a>1$, $n=1,2,\cdots$. 因此，数列$\{x_n\}$不以1为极限. 与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$矛盾.

(ii) $a<0$的情形.

这时，由数列$\{x_n\}$单调递增知$x_n\geqslant x_2=a^2-a+1>1$, $n=2,3,\cdots$. 因此，数列$\{x_n\}$不以1为极限. 与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$矛盾.

因为无论$a>1$还是$a<0$，都导致矛盾，所以由反证法就证明了$a\in[0,1]$. $\square$

四、(本题15分) 设$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 当x为有理数， \\ 0, & 当x为无理数. \end{cases}$ 证明：极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在当且仅当$x_0 \in \mathbb{Z}$.

证 下面分$x_0 \in \mathbb{Z}$和$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$两种情形讨论.

(i) $x_0 \in \mathbb{Z}$的情形.

这时，对任意$x \in \left(x_0 - \dfrac{1}{2}, x_0\right) \cup \left(x_0, x_0 + \dfrac{1}{2}\right)$, 有

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant |\sin(\pi x)| = |\sin(\pi(x-x_0))| \leqslant |\pi(x-x_0)| = \pi|x-x_0|.$$

根据两边夹定理知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(ii) $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$的情形.

这时，取定一个无理数列$\{x_n\}$：$x_n \to x_0\ (n\to\infty)$且$x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

取定一个有理数列$\{y_n\}$：$y_n \to x_0\ (n\to\infty)$且$y_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则由

$$0 \leqslant |\sin(\pi y_n) - \sin(\pi x_0)| = \left|2\sin\frac{\pi y_n - \pi x_0}{2}\cos\frac{\pi y_n + \pi x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\pi y_n - \pi x_0}{2}\right| \leqslant \pi|y_n - x_0|,$$

根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi y_n) = \sin(\pi x_0)$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\sin(\pi y_n) = \sin(\pi x_0) \neq 0.$$

根据海涅定理知极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

综合以上讨论知，极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在当且仅当$x_0 \in \mathbb{Z}$. □

五、(本题15分) 对于极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, 叙述并证明柯西收敛原理.

答 柯西收敛原理：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充分必要条件为: 对任何$\varepsilon > 0$, 都存在$X > 0$, 使当$|x| > X$及$|x'| > X$时, 有$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

柯西收敛原理的证明如下.

必要性. 设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 于是对于任给的$\varepsilon > 0$, 都存在$X > 0$, 使当$|x| > X$时, 就有$|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是当$|x| > X$及$|x'| > X$时, 有

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - A| + |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 任意取定一个满足条件$x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$的数列$\{x_n\}$. 对于任给的$\varepsilon > 0$, 按假设存在$X > 0$, 使当$|x| > X$及$|x'| > X$时, 有$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. 对于上述$X > 0$, 因为$x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, 故有N, 当$n > N$时, 有$|x_n| > X$. 故当$m > N$, $n > N$时, 有$|x_m| > X$, $|x_n| > X$. 由此得知, 当$m > N$, $n > N$时, 有

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon,$$

由数列极限的柯西收敛原理即得$\{f(x_n)\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 对于上述的$\varepsilon > 0$, 存在$N'$, 当$n > N'$时, 有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

取$n_0 = \max\{N, N'\} + 1$, 则有

$$|x_{n_0}| > X, \ \ |f(x_{n_0}) - A| < \varepsilon,$$

故而当$|x| > X$时, 有

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_{n_0})| + |f(x_{n_0}) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

按函数极限定义知$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. $\square$

六、(本题15分) 用现有知识计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{\ln(1+x)\cdot\ln(\sin x+\cos x)}$.

解 当$x\to 0$时，有$\ln(1+x)\sim x$, $\ln(\sin x+\cos x)\sim\sin x+\cos x-1$. 又当$x\to 0$时，有$\sin x\sim x$, $\cos x-1\sim -\dfrac{x^2}{2}$, 故有

$$\ln(\sin x+\cos x)\sim\sin x+\cos x-1\sim x\quad(x\to 0).$$

于是由等价无穷小量替换的方法，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{\ln(1+x)\cdot\ln(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{x^2}.$$

当$x\to 0$时，有$\mathrm{e}^{x\cos x}-1\sim x\cos x$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\cos x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x}=1.$$

因为当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，有$|x|<|\sin x|<|\tan x|$, 所以当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，有$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. 于是当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，有

$$0<\left|\frac{x-\sin x}{x^2}\right|=\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{|x|}<\frac{1-\cos x}{|x|}.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{|x|}=0$, 所以根据两边夹定理得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{\ln(1+x)\cdot\ln(\sin x+\cos x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-\sin x}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x\cos x}-x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}\\
=&\ 1+0\\
=&\ 1.
\end{aligned}$$

□

七、(本题10分) 设$\{x_n\}$是一个正数数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$, 数列$\left\{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\}$有界. 证明：对任意$p>1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}=0.$$

证 因为$\{x_n\}$是一个正数数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$, 所以对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$0<\dfrac{x_n}{n}<\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$. 于是当$n>N$时，有$0<x_n<n\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$. 因为$\{x_n\}$是一个正数数列，数列$\left\{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\}$有界，所以存在$M>0$, 对任意正整数$n$, 都有$0<\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant M$. 记$C=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_N^p$, 则当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}\\
&= \frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_N^p}{n^p}+\frac{x_{N+1}^p+x_{N+2}^p+\cdots+x_n^p}{n^p}\\
&= \frac{C}{n^p}+\left(\frac{x_{N+1}^{p-1}}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_{N+1}}{n}+\frac{x_{N+2}^{p-1}}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_{N+2}}{n}+\cdots+\frac{x_n^{p-1}}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_n}{n}\right)\\
&< \frac{C}{n^p}+\left(\frac{(N+1)^{p-1}\varepsilon}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_{N+1}}{n}+\frac{(N+2)^{p-1}\varepsilon}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_{N+2}}{n}+\cdots+\frac{n^{p-1}\varepsilon}{n^{p-1}}\cdot\frac{x_n}{n}\right)\\
&\leqslant \frac{C}{n^p}+\left(\varepsilon\cdot\frac{x_{N+1}}{n}+\varepsilon\cdot\frac{x_{N+2}}{n}+\cdots+\varepsilon\cdot\frac{x_n}{n}\right)\\
&= \frac{C}{n^p}+\varepsilon\cdot\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n}\\
&< \frac{C}{n^p}+M\varepsilon.
\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C}{n^p}=0$, 所以对上述$\varepsilon>0$, 存在正整数$N_1$, 当$n>N_1$时，有$0<\dfrac{C}{n^p}<\varepsilon$. 令$N'=\max\{N,N_1\}$, 则当$n>N'$时，有

$$0<\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}<\frac{C}{n^p}+M\varepsilon<\varepsilon+M\varepsilon=(M+1)\varepsilon.$$

按数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}=0.$$

□