2022-2023 学年第二学期高等代数与解析几何 2-2

期末考试试题 A

1 已知二次曲面 $2x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=3$ 经正交线性替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为椭球面 $y_1^2+y_2^2+by_3^2=3$ ，求 a,b 的值及正交矩阵 T

2 设 $\mathbb{P}$ 为数域，在 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 中令

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x&-x\\y&z\end{pmatrix}\middle|x,y,z\in\mathbb{P}\right\},V_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-a&c\end{pmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbb{P}\right\}$$

（1）证明：V_1,V_2 均为 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 的子空间

（2）求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的维数与一组基

3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

求 A 的特征多项式与最小多项式以及 Jordan 标准型

4 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转所产生的曲面方程

5 设 σ 为数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 中的线性变换，满足 $\sigma^2=\sigma$

（1）证明：$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)$

（2）证明：若 τ 是 V 中与 σ 可交换的线性变换，则 $\sigma(V),\sigma^{-1}(0)$ 均为 τ 的不变子空间

6 求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上两条相互垂直的直母线交点的轨迹方程

7 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵，证明：$|A+B|\geq|A|+|B|$，当且仅当 $B=0$ 时等号成立