

2023秋 数学物理方程 第二次小测

命题人：魏雅薇

一、推导位势积分公式：

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dx \quad (1)$$

二、证明调和函数的可去奇点定理：

当 $n = 2$ 时, 若 $u(Q)$ 在 A 点 (设为原点) 附近 (但 A 点可能除外) 调和, 而且

$$u(Q) = o(1) \ln r(A, Q), \quad (2)$$

则可以补充 $u(Q)$ 在 A 之值使 u 在包括 A 点在内的 A 的某邻域中调和.

三、求热传导算子 $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$ 的基本解.

四、求解热传导方程的柯西问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (3)$$

五、用傅立叶方法求解下列热传导方程的解 $u(x, t)$ ：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, 0) = u(l, 0) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (4)$$