

2023 - 2024 动力系统导论 1 期末考试

1. (8 分) 什么是动力系统?
2. (8 分) 写出 Poincaré 域的定义?
3. (8 分) 什么是 Diophantine 数, 它在研究圆周映射的过程中起到了怎样的作用?
4. (8 分) 叙述 Hartman-Grobman 线性化定理.
5. (8 分) 叙述 Denjoy 对圆周映射的贡献.
6. (15 分) 设 $f(x) = 8x(1-x)$, 记 $\Lambda = \{x | f^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}\}$. 对正整数 k , 求 $f|_\Lambda$ 周期不超过 k 的不同周期点的个数.
7. (15 分) 设 p 为 f 的一个双曲不动点, 证明: 过 p 的稳定流形与不稳定流形的交点为非游荡点.

8. (15 分) 给定三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 考虑 $\dot{x} = Ax + v(x)$, 其中 $v(x)$ 为高阶项.

- (1) A 的特征值是位于 Poincaré 域中还是位于 Siegel 域中?
- (2) A 的特征值是否共振?
- (3) 该系统能否解析线性化?

9. (15 分) 考虑拟周期系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + v(x, \varphi) \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

- (1) 结合标准型理论, 证明其线性化同调方程为

$$\frac{\partial h}{\partial x} Ax - Ah(x, \varphi) + \left\langle \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \omega \right\rangle = v(x, \varphi) \quad (*)$$

- (2) 假设 Diophantine 条件 $|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s + i(k, h)| \geq \frac{\gamma}{|m|^\tau}$ 成立, 其中 $\tau > n + d + 1$. 证明对任意 $v \in B_{\rho, h} := \left\{ v(x, \varphi) = \sum_{k, m, s} v_{k, m, s} x^m e^{i(k, \varphi)} e_s : \sum_{k, m, s} |v_{k, m, s}| \rho^m e^{|k|h} < \infty \right\}$, (*) 存在唯一解, 并给出解的估计.

马上毕业了, 给学弟学妹们做点贡献. —— sym