2023-2024第一学期数学类抽象代数期末试题

命题人：王秀玲

一、（10分）写出$\mathbb{Z}_{10}$可逆元、零因子、子环。

二、（10分）设I, J为整环R的非零理想，证明$I \cap J \neq \{0\}$.

三、（10分）设R是有限幺环, 幺元记为$1, a, b \in R$. 若$ab = 1$, 证明$ba = 1$.

四、（10分）证明$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$中$1 + \sqrt{-5}$是不可约元但不是素元，因此$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$不是唯一分解整环。

五、（20分）设$R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}\}, I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. 证明: (1) R是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子环; (2). I是R的极大理想。

六、（10分）证明$\langle x \rangle$是$\mathbb{Z}[x]$的素理想。

七、（10分）设R是主理想整环，I是R的非平凡理想。证明：(1).R/I的理想是主理想，并回答R/I是不是主理想整环；(2). R/I只有有限个理想。

八、（10分）设α是$\mathbb{Q}$的代数元，为多项式$x^3 - 3x^2 + 6x + 15$的根。(1).证明$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$; (2)用$1, \alpha, \alpha^2$表示$(1 - \alpha)^{-1}$.

九、（10分）设$\mathbb{F}$是域，α, β是$\mathbb{F}$的m, n阶代数元，满足$(m, n) = 1$. 证明：$[\mathbb{F}(\alpha, \beta), \mathbb{F}] = mn$.