

2023-2024 年大类数学物理方法期末试题

回忆人: qxy

一、(15分) 用能量积分的方法证明以下波动方程初边值问题解的唯一性, 其中 $n = 2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = f(x, t) \quad t > 0, x \in \Omega$$

$$u(x, t)|_{t=0} = g_0(x)$$

$$u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x)$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0$$

二、(15分) 求解热传导方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

三、(15分) 用 Fourier 方法求解热传导方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

四、(15分) 利用 Green 函数求解上半平面的 Dirichlet 问题:

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad y > 0$$

$$u|_{y=0} = f(x)$$

五、(15分) 设 $P(x, D)$ 是一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子, $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, 其象征 $\delta(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, 试证明: $P(x, D) = F^{-1} \delta(x, \xi) F$, 其中 F 为 Fourier 变换。

六、(15分) 写出磨光核的定义; 设 $f(x) \in D'(R^n)$, $\Psi_\epsilon(x)$ 为磨光核, 则 $f * \Psi_\epsilon = f_\epsilon(x) \in C^\infty$ 且有 $f_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ 在 $D'(R^n)$ 中成立。

七、(10分) 设 $f, g, h \in D'(R^n)$, 其中至少有两个广义函数具有紧支集, 证明 $(f * g) * h = f * (g * h)$ 。