2023-2024学年数学分析3-3（伯苓班）期末考试

回忆: lwx

可能用到的公式:

1. **(Parseval等式)** 若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上黎曼可积, 则 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$, 其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.
2. $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}(x\to+\infty)$

一. 求出下列级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^{2n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\cos(\frac{n\pi}{4})\right)^n x^n$

二. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\beta}(\alpha\in\mathbb{R},\beta>0)$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

三. $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上黎曼可积, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, n\geq 1$. 证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}b_n}{n}$$

四. 计算

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha xdx$$

五. 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\sin tdt$$

六. 计算

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

其中 L 为圆柱 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线, 从 $x>1$ 处看为逆时针.