2023-2024 春省身班泛函分析期末考试 (A 卷)
回忆者：cbj
考试时间：2024年6月21日
几乎全是作业题（教材课后题），刘锐老师太善良了！

题目 1. (10 分)
5. 设 $(X, \| \cdot \|)$ 是赋范空间，$X_0$ 是 $X$ 中的稠密子集，证明：对于每一 $x \in X$ 存在
$(x_n) \subset X_0$，使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$.

题目 2. (15 分)
15. 设 Banach 空间 $(X, \| \cdot \|)$ 具有 Schauder 基 $(e_x)$，用 $M$ 表示所有使得
$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ 在 $X$ 中收敛的数列 $(\xi_k)$ 的全体，按通常方式定义线性运算构成的线性空间，对于每一 $x =
(\xi_k) \in M$，定义
$$\| x \|_1 = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|,$$
证明 $(M, \| \cdot \|_1)$ 是 Banach 空间.

题目 3. (15 分)
4. 设 $X$ 是 Banach 空间，证明如果 $X^*$ 是可分的，则 $X$ 也是可分的.

题目 4. (15 分) 证明 $(c_0)^* = l^1$.

题目 5. (10 分)
5. 设 $H$ 是内积空间，$M$ 是 $H$ 的线性子空间。证明如果对于每一个 $x \in H$，它在 $M$ 上
的正交投影存在，则 $M$ 是闭子空间.
题目 6. (15 分)
10. 设 $X$ 是 Banach 空间，$A, B$ 是 $X$ 的闭子空间，且 $X = A + B$。证明存在常数 $M_i$，使得每一个 $x \in X$ 有表示 $x = a + b$，其中 $a \in A, b \in B$ 并且
   \[ ||a|| + ||b|| \leq M_i ||x||. \]

题目 7. (15 分) 证明自反 Banach 空间的闭子空间也自反。

题目 8. (5 分) 证明任意可分度量空间都等距于一个可分 Banach 空间的子集。